

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

BUI TRONG LIEU

PREMIERE THESE : Estimations pour des processus de Markov.

DEUXIEME THESE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le — — — — — *1962 devant la Commission d'Examen*

MM. R. FORTET

J. VILLE

J. NEVEU

Président

Examineurs

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

BUI TRONG LIEU

PREMIERE THESE : Estimations pour des processus de Markov.

DEUXIEME THESE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le _____ 1962 devant la Commission d'Examen

MM. R. FORTET

J. VILLE

J. NEVEU

Président

Examineurs



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen : M. ZAMANSKY

MM. :

G. JULIA	T Analyse supérieure et algèbre sup.
DE BROGLIE	T Théories physiques
PRENANT	T Anatomie et histologie comparées
GRASSE	T Evolution des êtres organisés
PREVOST	T Chimie organique
BOULIGAND	T Analyse appliquée à la géométrie
CHAUDRON	T Chimie appliquée
WYART	T Minéralogie et cristallographie
TEISSIER	T Zoologie
MANGENOT	T Biologie vég. (Orsay)
AUGER	T Physique quantique et relativité
MONNIER	T Physiologie générale
PIVETEAU	T Paléontologie
ROCARD	T Physique (E.N.S.)
CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T Chimie générale
FAVARD	T Géométrie supérieure
COULOMB	T Physique du globe
Mlle COUSIN	T Biologie Animale (SPCN)
CHRETIEN	T Chimie minérale
DRACH	T Zoologie
KASTLER	T Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T Génétique
RIVIERE	T Géologie SPCN et sédim.
GAUTHERET	T Biologie vég. (PCB)
R. LUCAS	T Recherches physiques
A. THOMAS	T Biologie cellulaire
ARNULF	T Optique appliquée
MORAND	T Physique enseignement
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.)
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides
DANJON	T Astronomie

MM. :

PETIT	T Biologie maritime
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T Embryologie
EICHHORN	T Botanique
DE CUGNAC	T Biologie vég. (SPCN)
Mlle CAUCHOIS	T Chimie physique
THELLIER	T Physique du globe
L'HERITIER	T Biologie gén. (Orsay)
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T Mécanique générale
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres
QUELET	T Chimie organique
CAGNIARD	T Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T chimie macromoléc.
CUVILLIER	T Micropaléontologie
JUNG	T Pétrographie
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T Chimie organique et struct.
JACQUINOT	T Spectroscopie et phys. céleste (Orsay)
VASSY	T Physique de l'atmosph.
DESTOUCHES	T Théories physiques
AMIEL	T Chimie générale
HOCART	T Minéralogie et cristallographie
J. P. MATHIEU	T Physique (Optique)
COUTEAUX	T Biologie animale (PCB)
MAY	T Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
FELDMANN	T Biologie végé. marine
GUINIER	T Physique des solides (Orsay)
JOST	T Physiologie comparée
FORTET	T Calcul des probabilités et Physique math.



SCHWARTZ	T Calcul différentiel et intégral	BRUN	T Méca.exp.des fluides
CHOUARD	T Physiologie végétale	LEDERER	T Chimie biologique
MALAVARD	T Aviation (technique aéronaut.)	Mme DUBREIL	T Mathématiques(Agrég.)
BRELOT	T Calcul différentiel et intégral	Mme LELONG	T Mathématiques (ENS)
NORMANT	T Synthèse organique générale	BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.)
BENARD	T Chimie minérale	COTTE	T Physique Electricité
BUVAT	T Botanique (E.N.S.)	J.E.DUBOIS	T Chimie organique
DUGUE	T Statistique mathémat.	LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.)
SOULAIRAC	T Psychophysiologie	A.MICHEL	T Chimie minérale(Orsay)
ULRICH	T Physiologie végétale	OLMER	T Energétique générale
MARECHAL	T Optique théorique et appliquée	ROUAULT	T Electricité (Orsay)
KIRRMANN	T Théories chimiques	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
CHADEFAUD	T Botanique	BARCHEWITZ	T Chimie physique
Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	BROSSEL	T Physique atomique
SALEM	T Mathématiques géné.	BUSER	Physiologie comparée
LELONG	T Applic. de l'Analyse à la Géométrie	CAMUS	Physiol.végé.BMPV
DEVILLIERS	T Anatomie et histologie comparées	CASTAING	T Physique (Orsay)
EHRESMANN	T Topologie algébrique	CURIEN	T Minéralogie et Crist.
FRANCON	T Physique (S.P.C.N.)	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
GLANGEAUD	T Géographie physique et géologie dynamique	NOIROT	Evolution des êtres org.
GODEMENT	T Mathématiques (MPC)	PANNETIER	T Chimie géné (Orsay)
PISOT	T Tech.math.de la phys.	POSSOMPES	T Zoologie
ROCH	T Géologie	PULLMANN	T Chimie théorique
SCHATZMAN	T Astrophysique	TEILLAC	T Physique nucléaire et radioactivité
TERMIER	T Paléontologie stratigraphique	TONNELAT	T Biologie physico-chimique
ZAMANSKY	T Mathématiques géné.	VILLE	T Econométrie
LENNUIER	T Physique (P.C.B.)	WILLEMART	Chimie (P.C.B.)
RIZET	T Génétique (Orsay)	DODE	T Chimie (Orsay)
ROUTHIER	T Géologie appliquée	FREYMANN	T Recher.ches physiques
Mme TONNELAT	T Physique théorique	GUINOCHE	T Biologie végétale S.P.C.N.(Orsay)
DIXMIER	T Mathématiques (MPC)	ROLLET	T Chimie (P.C.B.)
SOUCHAY	T Chimie générale	Mlle JOSIEN	T Chimie S.P.C.N.
AIGRAIN	T Electrotechnique géné.	CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théor.des groupes
BRUSSET	T Chimie systématique	ARNOULT	T Electronique(Orsay)
M.LEVY	T Physique théorique des hautes éner.(Orsay)	CHAPELLE	T Physique (Orsay)
Mlle CHAIX	T Chimie biologique	DELANGE	T Mathématiques(Orsay)
Mme HUREL-PY	Biologie végé.(PCB)	DENY	T Mathématiques géné. (Orsay)
PIAUX	T Chimie (M.P.C.)	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
		LUCAS G.	T Géologie
		ALLARD	T Chimie physique
		BERTHELOT	T Physique fondamentale des hautes énergies Orsay

BRICART	T Météorologie et Phys. de l'atmosphère	FREON	T Chimie organique (Orsay)
Mme ALBE-FESSARD	Psychophysiologie	HELLER	Physiologie végétale
FRIEDEL	Physique des solides (Orsay)	TORTRAT	Calcul des proba.
M.JULIA	Etudes des Molécul. naturelles complexes	CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.)
LENDER	T Biologie anim.(SPCN) (Orsay)	MAGNAN	T Physique (S.P.C.N.)
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments	DAUDEL	T Méca.ondulatoire ap- pliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire
Mlle QUINTIN	T Electrochimie	Mme FOURCROY	Biologie végétale (S.P.C.N.)
MONOD	T Chimie du métabolisme	Mme CHOQUET-BRUHAT	T Méca.analyt. et Méca.céleste
BENOIT	T Physiologie animale (Orsay)	Mlle VEIL	Physiologie générale
DE POSSEL	T Analyse numérique	LWOFF	T Microbiologie
CHARLOT	T Chimie analytique	SIESTRUNCK	T Mécanique physique et expérimentale
HAISSINSKY	T Radiochimie	LACOMBE	T Métallurgie des mé- taux nucl.
LEMEE	T Physiolog.vég.B.M.P.V. (Orsay)	BROCHARD	T Physique (P.C.B.) (Orsay)
GUERIN	T Chimie MPC (Orsay)	CABANNES	T Mécanique générale
M.CHATELET	Chimie (P.C.B.)	LESIEUR	T Mathématiques M.P.C. (Orsay)
JEAN	T Physique nucl.(Orsay)	MAZET	T Mécanique générale (Orsay)
MATTIER	T Physique S.P.C.N.	CAIRE	Géographie phys. et Géol.dynamique
Louis MICHEL	Physique théor.des Hautes énerg. (Orsay)	COMOLET	Mécanique des fluides
BERGERARD	Zoologie (Orsay)	CORABOEUF	Physiologie animale
BERTEIN	Electronique (Orsay)	DELLOUE	Physique de l'exos- phère
BOUISSIÈRES	Chimie des radioélé- ments (Orsay)	GORENFLOT	Botanique II(Orsay)
Mme COUTURE	Thermodynamique et méca- nique physique	HOUILLOIN	Biologie animale (P.C.B.)
ELLENBERGER	Géologie appliquée s/ le terr.	J.JULLIEN	Chimie P.C.B.
FRANC	Biologie anim.(PCB)	MALGRANGE	Tech.Math.de la Phys.
SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay)	OLIVIER	Antropologie
STOLKOWSKI	Physiologie générale	NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
ACHER	Chimie biol.(Orsay)	BLANC-LAPIERRE	Physique B.N.S. (Orsay)
BAUDOIN	Biologie anim.PCB		
BEAUMONT	Biologie animale SPCN		
BLAMONT	Géophysique ionosphère		
BOURREAU	Botanique		
D.CURIE	Physique (M.G.P.)		
DURAND-DELGA	Géologie		

Secrétaire Général : R.POULLAIN

INTRODUCTION

L'étude des problèmes de statistique dans les processus de Markov prend une place de plus en plus importante ces dernières années. Il semble pourtant que les premiers travaux sur ce sujet remontent déjà à une quinzaine d'années. Estimations et tests d'hypothèse y sont traités. Mais sauf quelques exceptions, presque tous les auteurs se sont limités à l'étude des processus discrets et à un nombre fini d'états. J'avais établi, lors d'un travail précédent, (cf. [8]) une liste bibliographique. Mais deux autres listes plus complètes se trouvent dans [17] et [5].

Le présent travail est consacré à cette étude. Il comporte deux parties.

La première est divisée en trois chapitres: les deux premiers sont destinés respectivement à l'estimation dans des processus discrets et permanents (terminologie de [7]), et le troisième plus modeste en volume, est consacré au test de stationnarité. Certains résultats des deux chapitres ont été résumés dans mes trois notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (cf. [9] et [10]). Leur publication est d'ailleurs antérieure à la parution du livre de P. Billingsley, "Statistical inference for Markov processes" (cf. [6]). Il se trouve que certains résultats coïncident, quoique les méthodes utilisées ne soient pas toujours les mêmes. Cependant aucune étude comparative ne sera faite dans ce qui suit.

La deuxième partie, composée de deux chapitres, est consacrée à l'estimation des covariances des fonctions aléatoires liées à une fonction aléatoire Markovienne. Une étude préalable

sur les fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T a été nécessaire, et fait l'objet du premier chapitre. Cette partie est susceptible d'avoir des applications pratiques.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur R. Fortet pour avoir dirigé les recherches qui ont abouti à l'élaboration de cette thèse, et de renouveler mes remerciements les plus vifs au Docteur J. Neveu pour l'aide et les conseils qu'il m'a toujours si gentiment accordés. Je remercie également Monsieur le Professeur J. Ville d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury d'examen.

De nombreuses conversations avec Monsieur le Professeur L. LeCam pendant son séjour en France, au printemps 1961, m'ont été extrêmement utiles.

Ce travail a pu être achevé grâce au soutien et à la compréhension de la Direction des Etudes et Recherches de l'Electricité de France et de ses responsables, en particulier du "Service des Etudes Mathématiques et de leurs Applications nouvelles" et de son Chef. Je remercie également les membres du "Groupe Mathématique", et tout particulièrement D. Carton, pour les encouragements et l'aide efficace qu'ils m'ont apportés.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

Il ne s'agit pas de reproduire ici des définitions déjà connues. Je me propose plutôt de les rappeler dans le but de préciser les notations et la terminologie.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ un espace de probabilité, où $\mathcal{A}$ désigne une tribu de parties de Ω , et Pr une mesure de probabilité. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Une application $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est dite $\mathcal{A}$ -mesurable si $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Nous dirons dans ce cas que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$.

Soit une famille de variables aléatoires X_t indicées par $t \in \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est un ensemble totalement ordonné. Nous disons que cette famille est une fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et à valeurs dans $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), t \in \mathcal{T}\}$. $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ est appelé l'espace des états à l'instant t . Lorsque $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z} =$ l'ensemble des entiers, nous disons que la fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est discrète. Lorsque $\mathcal{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction aléatoire est dite permanente (terminologie empruntée à [7]). Ce qui nous intéressera, c'est plutôt le cas où $\mathcal{T} = \mathbb{N} =$ l'ensemble des entiers ≥ 0 , et celui où $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+ =$ l'ensemble des nombres réels ≥ 0 . Pour $\omega \in \Omega$ l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ s'appelle la trajectoire correspondante à ω .

2. Soit $(\mathcal{X}', \mathcal{B}')$ un espace mesurable. Soit $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ où X est $\mathcal{A}$ -mesurable, et soit $f: (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{B}')$ où f est $\mathcal{B}$ -mesurable. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}', \mathcal{B}')$. Dans le cas où $(\mathcal{X}', \mathcal{B}') = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$, $\mathcal{R}$ désignant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, $f \circ X$ est appelée variable aléatoire "liée" à la variable aléatoire X .

De même, soit une fonction aléatoire $X_t: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$

et une application $\mathcal{B}$ -mesurable $f : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{R})$, la fonction aléatoire $\{f \circ X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est appelée fonction aléatoire "liée" à la fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$.

3. Les définitions et la terminologie ci-dessous sont empruntées à [24]. Soient trois sous-ensembles disjoints de $\mathcal{T}$: $U < V < W$ appelés passé, présent et futur. Notons par $X^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(X)$ la tribu induite par la variable aléatoire X .

Une famille $\{A_t, t \in \mathcal{T}\}$ de sous tribus de $\mathcal{A}$ est dite Markovienne si

$$\Pr(A_{\text{passé}} \cap A_{\text{futur}} \mid A_{\text{présent}}) = \Pr(A_{\text{passé}} \mid A_{\text{présent}}) \times \Pr(A_{\text{futur}} \mid A_{\text{présent}}).$$

Une fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dite Markovienne si la famille des tribus induites $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(X_t) = X_t^{-1}(\mathcal{B}_t)$ par la famille de variables aléatoires $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ est Markovienne.

Un processus de Markov est une famille de fonctions aléatoires Markoviennes ayant même probabilités conditionnelles et à probabilité initiale arbitraire.

Pour $s < t$, notons par $P_{s,t}(x, B) = \Pr\{\omega : X_t(\omega) \in B \mid X_s(\omega) = x\}$ où $B \in \mathcal{B}_t$, la probabilité de passage (ou de transition) de x (instant s) à B (instant t). Rappelons que $P_{s,t}(x, B)$ est telle que

- a/ $\forall B \in \mathcal{B}_t$, $P_{s,t}(\cdot, B)$ est une fonction $\mathcal{B}_s$ -mesurable,
- b/ $\forall x \in \mathcal{X}_s$, $P_{s,t}(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$,

$$c/ \quad P_{s,t}(x, B) = \int_{\mathcal{X}} P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, B),$$

(équation de Chapman-Kolmogorov)

Lorsque $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\forall t \in \mathcal{T}$, et que $P_{s,t}(x, B) = P_{t-s}(x, B)$, nous disons que le processus est homogène. Lorsque une fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ d'un processus de Markov homogène est telle que ses probabilités a priori $\Pi_t = \Pi_{t_0}$,

$\forall t \in \mathbb{T}$, nous disons que cette fonction aléatoire est strictement stationnaire (terminologie de [7]).

4. Notations:

Convenons de noter un processus de Markov homogène donné par $\{P_t, t \in \mathbb{T}\}$ et les fonctions aléatoires par $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$.

Nous noterons par $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ l'espace des variables aléatoires X (définies à une équivalence près) à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\int_{\mathcal{X}} |X(\omega)|^p d\text{Pr}(\omega) < +\infty$. La norme de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ sera notée par $\|\cdot\|_{L_2}$ ou simplement $\|\cdot\|$ lorsqu'aucune confusion n'est possible; tandis que nous désignons par $\langle X, Y \rangle$ la covariance $E\bar{X}Y$. Ces écritures sont introduites, non pas pour compliquer l'exposé, mais plutôt pour éviter le surchargement éventuel des E , des $[\]$ et des $\sqrt{}$.

En ce qui concerne les mesures, nous écrirons indifféremment $d\mu(x)$ et $\mu(dx)$. Cette incohérence de notation a pourtant l'avantage d'éviter des confusions, par exemple entre x et y dans $P_t(x, dy)$. Ajoutons cependant que, pour les mesures produits, nous préférons écrire $dN_T(x, y; \omega)$ par exemple, mesure dépendant de $\omega \in \Omega$.

Rappelons enfin les abréviations usuelles suivantes : m.q. (moyenne quadratique), p.p. (presque partout), p.s. (presque sûre), v.a. (variable aléatoire), f.a. (fonction aléatoire).

P R E M I E R E P A R T I E

ESTIMATION CONCERNANT DES PROCESSUS DE MARKOV
ET TEST DE L'HYPOTHESE DE STATIONNARITE

Cette première partie est divisée en trois chapitres : le premier, consacré à l'estimation dans des processus discrets, le second, dans des processus permanents, et le troisième, au test de l'hypothèse de stationnarité.

Le problème principal que nous nous proposons d'étudier dans les deux premiers chapitres, est en gros le suivant (il sera posé en détail plus loin): "Soit une famille de processus de Markov homogènes, notée $\{P_t(\dots; \theta), t \in \mathcal{T}\}_{\theta \in \Theta}$, dépendant d'un paramètre $\theta \in \Theta$, où Θ est un ouvert de $\mathbb{R}^s$. Etant donné un morceau de trajectoire $\{X_t(\omega)\}_{t \in [0, T]}$, déterminer le processus de la famille auquel la trajectoire appartient". Trois méthodes seront proposées: celles du maximum de vraisemblance, du Ψ^2 minimum et du χ^2 minimum.

Pour simplifier l'exposé, il nous arrive fréquemment de nous restreindre au cas où $\Theta \subset \mathbb{R}$. Il apparaît cependant que la généralisation à celui où $\Theta \subset \mathbb{R}^s$ se fait sans difficultés.

Le problème de l'estimation d'un paramètre, dans le cas des variables aléatoires indépendantes est bien connu (cf. [12] par exemple). Pour les processus de Markov, l'étude ne se présente pas tout à fait de la même façon, surtout pour les processus permanents où les résultats paraissent moins évidents.

En vue du résultat fondamental qui est l'existence et la convergence (p.s. ou en probabilité) d'une racine de l'équation

de vraisemblance, ou celle donnée par chacune des deux autres méthodes, des résultats auxiliaires concernant le comportement asymptotique des durées de séjour et des fréquences de passage seront établis.

Enfin, comme application, nous estimons (dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini) les éléments du vecteur des probabilités absolues et ceux de la matrice P des probabilités de passage (resp. de la matrice Q) pour les processus discrets (resp. pour les processus permanents). Il apparaît que les trois méthodes utilisées donnent les mêmes résultats, avec cependant un léger avantage — à un certain point de vue — en faveur de la deuxième.

Le troisième chapitre utilise des résultats établis dans les deux premiers. Nous testons l'hypothèse de stationnarité à l'aide de la loi du χ^2 ou de la loi normale selon les cas.

C H A P I T R E I

ESTIMATION DANS DES PROCESSUS DE MARKOV DISCRETS.

Ce chapitre, comme le suivant, comporte deux paragraphes consacrés respectivement au cas où l'espace des états est un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, et à celui où l'espace des états $\mathcal{X}$ ne contient qu'un nombre fini de points.

§1. CAS GENERAL.

Nous nous servirons souvent, dans ce paragraphe, des résultats établis dans [13]. Nous imposerons d'abord des conditions assez fortes pour $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, puis nous essayerons de les modifier en vue d'application au cas où $\mathcal{X}$ est dénombrable.

Soit donc $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ un processus de Markov discret, homogène, dont l'espace des états est $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Rappelons la condition de Doeblin (D): $\exists$ une mesure ν sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, (avec $0 < \nu(\mathcal{X}) < \infty$), un entier $m \geq 1$, et un $\varepsilon > 0$ tels que $A \in \mathcal{B}$, $\nu(A) \leq \varepsilon \implies P_m(x, A) \leq 1 - \varepsilon$.

Dans ce qui va suivre, nous faisons l'hypothèse suivante

(H_1^1) : $\exists$ une mesure finie μ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, telle que $\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x, \cdot) \ll \mu$, avec une densité de Radon-Nikodym $p(x, y)$ bornée.

il est facile de voir que cette hypothèse $\implies$ (D).

Considérons maintenant

(H_1^2) : a/ (H_1^1) est vérifiée; et $p(x, y)$ est $\mathcal{B}^2$ -mesurable, c'est à dire par rapport au couple (x, y) .

b/ $\exists$ une seule classe ergodique d'états sans sous-classes cycliques.

Nous savons que dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x, A) = \Pi(A)$ existe

et est indépendante de x ; que Π est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, (cf. [13] p.214 et p.197); et que Π est munie d'une densité de Radon-Nikodym $\tilde{\Pi}$ par rapport à μ . $\tilde{\Pi}$ est d'ailleurs définie par $\tilde{\Pi}(x) = \int_{\mathcal{X}} p_n(x, y) d\Pi(y)$. Comme autre conséquence de (H_1^2) , on a $\forall x \in \mathcal{X}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x, y) = \tilde{\Pi}(y)$, p.p. par rapport à μ . En effet, $\frac{1}{K} p_n(x, y) \leq 1$; l'application des résultats établis dans [13] montre que $\frac{1}{K} |p_n(x, y) - \tilde{\Pi}(y)| \leq 2\delta\rho^n$, $\forall x \in \mathcal{X}$, où ρ et δ sont deux constantes > 0 , avec $\rho < 1$.

Enfin, désignons par

(H_1^3) : a/ (D) est satisfaite,

b/ $\exists$ une seule classe ergodique sans sous-classes cycliques.

1.1. PROCESSUS A DEUX DIMENSIONS ASSOCIE.

Notons par $\mathcal{X}^2$, $\mathcal{B}^2$ et $\hat{\mu}$ respectivement l'espace, la tribu et la mesure produits $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $\mu \times \mu$. Nous allons maintenant définir un processus de Markov $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ discret, homogène, dont l'espace des états est $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$ de la façon suivante:

$\forall \hat{A} \in \mathcal{B}^2$, où $\hat{A}$ est un rectangle $A \times B$, $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$, alors la probabilité de passage de $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ à $\hat{A}$ en n sauts vaut

$$\hat{P}_n[(x, y), \hat{A}] = \begin{cases} \int_B I_A(y) P(y, dz) & \text{si } n = 1, \\ \int_A \int_B P_{n-1}(y, dz) P(z, du) & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

où $I_A(y) = 1$ si $y \in A$, et $= 0$ si $y \notin A$.

On étend ensuite la définition de $\hat{P}_t[(x, y), \cdot]$ sur $\mathcal{B}^2$, d'après le théorème de Carathéodory (cf. [24] p.87).

PROPOSITION 1-1-1. Si $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ vérifie (H_1^2) , alors $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ vérifie (H_1^3) .

Démonstration. Pour $n > 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\hat{P}_n[(x,y), A \times B] &= \int_A \int_B p_{n-1}(y,z) p(z,u) d\mu(z) d\mu(u) \\ &= \int_{A \times B} \hat{P}_n[(x,y), (z,u)] d\hat{\mu}(z,u) .\end{aligned}$$

Or $p(x,y) \leq K \implies p_n(x,y) \leq K$, $\forall n > 1$,

d'où $\hat{P}_n[(x,y), (z,u)] \leq K^2$. L'extension à des $\hat{B} \in \mathcal{B}^2$ qui ne sont pas des rectangles $A \times B$ ne présente pas de difficultés.

Ainsi, $\hat{P}_n[(x,y), .]$ ne possède de densité par rapport à $\hat{\mu}$ que lorsque $n > 1$. Donc, $\forall n > 1, \exists \hat{\mu}$ sur $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$, avec $\hat{\mu}(\mathcal{X}^2) < +\infty$, et un $\varepsilon > 0$, tels que $\hat{B} \in \mathcal{B}^2, \hat{\mu}(\hat{B}) \implies \hat{P}_n[(x,y), \hat{B}] \leq 1 - \varepsilon$. L'hypothèse (D) est ainsi vérifiée par le processus $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{P}_n[(x,y), (z,u)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n-1}(y,z) p(z,u) \\ &= \tilde{\Pi}(z) p(z,u) \quad , \text{ p.p. par rapport à } \hat{\mu} .\end{aligned}$$

Comme de plus, $0 \leq \hat{P}_n[(x,y), (z,u)] \leq K^2$, d'après le théorème de Fatou-Lebesgue (cf. [18] p.125), on a $\forall B \in \mathcal{B}^2$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n[(x,y), \hat{B}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\hat{B}} \hat{P}_n[(x,y), (z,u)] d\hat{\mu}(z,u) \\ &= \int_{\hat{B}} \tilde{\Pi}(z) p(z,u) d\hat{\mu}(z,u) \\ &= \hat{\Pi}(\hat{B}) \quad , \text{ indépendante de } (x,y) .\end{aligned}$$

Cette propriété $\iff \exists$ une seule classe ergodique sans sous-classes cycliques pour $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, (cf. [13] p.214). Ce qui démontre que $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ vérifie (H_1^3) .

1.2. DEPENDANCE D'UN PARAMETRE. ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Considérons la fonction aléatoire Markovienne $\{\hat{X}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ du processus $\{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ ayant $\hat{\Pi}$ pour probabilité absolue.

sur $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$. Si la densité de probabilité $p(x, y)$ est $\mathcal{B}^2$ -mesurable, alors $\{p, \hat{X}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, fonction aléatoire liée à la fonction aléatoire $\{\hat{X}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, est une fonction aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$.

Supposons maintenant que la densité de probabilité de passage du processus $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ dépende d'un paramètre $\theta \in \Theta$, Θ étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et contenant θ_0 , valeur vraie de θ . Si les dérivées $\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\Pi}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} p$ existent, alors l'équation de vraisemblance, pour l'observation faite de $t = 0$ à $t = n$, s'écrit

$$(I-1-1) \quad \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta; \omega) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } \tilde{\Pi}[X_0(\omega); \theta] + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p[X_i(\omega), X_{i+1}(\omega); \theta] = 0.$$

Pour l'étude de l'estimation, posons les hypothèses suivantes

(H₁⁴): 1°/ $\exists$ une mesure μ finie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, indépendante de θ , telle que $\forall \theta \in \Theta$ et $\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x, \cdot; \theta) \ll \mu$, où la densité de Radon-Nikodym $p(x, y; \theta)$ est bornée, et $\mathcal{B}^2$ -mesurable.

2°/ $\forall \theta \in \Theta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A; \theta) = \Pi(A; \theta)$.

3°/ $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \tilde{\Pi}$ et $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} p$ existent et sont bornées pour $v=1, 2, 3$.

LEMME 1. Sous (H₁⁴),

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) = 0, \quad \text{p.s.}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_n(\theta_0) = - \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}(x; \theta_0)}{p(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) \right]^2 d\hat{\mu}(x, y) \quad \text{p.s.}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} L_n(\theta) = E \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p[X_i(\omega), X_{i+1}(\omega); \theta] \quad \text{p.s.}$$

Démonstration. Introduisons les applications f_v de $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$

dans $(R, \mathcal{R})$ telles que $(x, y) \xrightarrow{f_v} \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \text{Log } p(x, y; \theta_0)$ avec $v=1, 2$ (respectivement pour les cas (i) et (ii)), et $(x, y) \xrightarrow{f_3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p(x, y; \theta)$ pour (iii). Nous savons que, dans ce cas, d'après le théorème 6-1 p. 219 dans [13],

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [f_v \circ \hat{X}_t](\omega) = E(f_v \circ \hat{X}_1) \quad \text{p.s.}$$

Il reste à calculer $E(f_v \circ \hat{X}_1)$ pour chacun des trois cas.

(i) Ici $(x, y) \xrightarrow{f_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x, y; \theta_0)$. Nous avons

$$\begin{aligned} E(f_1 \circ \hat{X}_1) &= \int_{\mathcal{X}^2} \tilde{\Pi}(x; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) d\hat{\mu}(x, y) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \mathcal{X}; \theta_0) = 0 \\ &\quad (\text{d'après } (H_1^4) \text{ } 3^\circ \text{ et } 1^\circ). \end{aligned}$$

(ii) Pour ce cas, $(x, y) \xrightarrow{f_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \text{Log } p(x, y; \theta_0)$.

Nous obtenons, après calculs et en nous appuyant sur $(H_1^4) \text{ } 3^\circ$,

$$E(f_2 \circ \hat{X}_1) = - \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}(x; \theta_0)}{p(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) \right]^2 d\hat{\mu}(x, y) < 0.$$

(iii) Ici, $(x, y) \xrightarrow{f_3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p(x, y; \theta)$,

$$\text{et} \quad E(f_3 \circ \hat{X}_1) = \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p(x, y; \theta) \tilde{\Pi}(x; \theta_0) d\hat{\mu}(x, y).$$

LEMME 2. Sous (H_1^4) ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\|^2 &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} E \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_n(\theta_0) \\ &= \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}(x; \theta_0)}{p(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) \right]^2 d\hat{\mu}(x, y) < +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration. Au lieu de $\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\|^2$, il suffit de considérer

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n f_{1 \circ} \hat{X}_t \right\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|f_{1 \circ} \hat{X}_t\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{t, \tau: \\ t \neq \tau}} \langle f_{1 \circ} \hat{X}_t, f_{1 \circ} \hat{X}_\tau \rangle.$$

Or, pour $t \neq \tau$, par exemple $t < \tau$,

$$\begin{aligned} \langle f_{1 \circ} \hat{X}_t, f_{1 \circ} \hat{X}_\tau \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x_t, x_{t+1}; \theta_0), \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x_\tau, x_{\tau+1}; \theta_0) \right\rangle \\ &= \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx_t; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_t, x_{t+1}; \theta_0) d\mu(x_{t+1}) \int_{\mathcal{X}} p_{\tau-t-1}(x_{t+1}, dx_\tau; \theta_0) \\ &\quad \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_\tau, x_{\tau+1}; \theta_0) d\mu(x_{\tau+1}) \\ &= 0, \text{ toujours d'après } (H_1^4) \text{ 1}^\circ \text{ et 3}^\circ. \end{aligned}$$

D'où, puisque $\|f_{1 \circ} \hat{X}_t\| = \|f_{1 \circ} \hat{X}_1\|$, $\forall t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\|^2 &= \|f_{1 \circ} \hat{X}_1\|^2 \\ &= \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}(x; \theta_0)}{p(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) \right]^2 d\hat{\mu}(x, y) < +\infty. \end{aligned}$$

Les études précédentes nous conduisent à énoncer le résultat suivant

PROPOSITION I-1-2. Sous (H_1^4) ,

(i) L'équation de vraisemblance (I-1-1), équation en θ , possède une racine simple $\theta_n^*(\omega)$ pour $n \geq N_0(\omega)$ où N_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s., θ_0 étant la valeur vraie de $\theta \in \Theta$.

(ii) $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type σ

$$\sigma = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\|^2 \right)^{-1} = \left(\int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}}{p} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p \right)^2 d\hat{\mu} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Démonstration. La démonstration est ici la même que pour le

cas des variables aléatoires indépendantes (cf.[12] par exemple).

$$(i) \text{ Ecrivons } \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta) = B_0 + B_1 \cdot (\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} B_2 \cdot (\theta - \theta_0)^2,$$

$$\text{où } \frac{1}{n} \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} L_n(\theta_0) = B_{v-1} \quad (v=1,2), \quad \text{et}$$

$$B_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} L_n(\theta_1), \quad \text{avec } \theta_1 = \theta_0 + \eta(\theta - \theta_0), \quad |\eta| < 1.$$

D'après (H_1^4) 3^o/, $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \tilde{\Pi}$ et $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} p$ sont bornées, et comme μ

est supposée finie, $E|B_2| \leq M < \infty$. Le lemme 1 montre que si nous prenons δ_1 tel que $0 < \delta_1 < \frac{-1}{2(M+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} EB_1$, alors que pour n grand, on a p.s.

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta) < 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_0 + \delta_1$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta) > 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_0 - \delta_1.$$

Le fait que θ_n^* est racine simple p.s. est due à ce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s.} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_n(\theta_0) < 0.$$

$$(ii) \text{ Ecrivons } \sqrt{n} (\theta_n^* - \theta_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0)}{-\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_n[\eta(\theta_n^* - \theta_0) + \theta_0]}, \quad |\eta| < 1.$$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n f_1 \circ \hat{X}_t$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss.

En effet, $f_1 \circ \hat{X}_t$ étant bornée, d'où pour $\delta > 0$,

$$E|f_1 \circ \hat{X}_t|^{2+\delta} = E\left|\frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(X, Y; \theta_0)\right|^{2+\delta} < +\infty. \text{ Il suffit alors}$$

d'appliquer le théorème 7-5, p.228 dans [13] (la mesurabilité par rapport au couple (x, y) de $p(x, y; \theta)$ étant assurée par (H_1^4) 1^o).

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n f_1 \circ \hat{X}_t$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n f_1 \circ \hat{X}_t \right\|$.

D'après le lemme 2 et le théorème de convergence p.254 dans [13],

$\sqrt{n} (\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\| \right)^{-1} = \left(\int_{\mathcal{X}^2} \frac{\tilde{\Pi}(x; \theta_0)}{p(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, y; \theta_0) \right]^2 d\hat{\mu}(x, y) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Remarque. Dans l'hypothèse (H_1^4) , on peut évidemment supprimer les conditions que $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \Pi$ et $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} p$ sont bornées et les remplacer par d'autres plus faibles, par exemple 4° de (H_1^5) ci-dessous.

Modification des hypothèses en vue d'application au cas dénombrable.

Soit l'hypothèse suivante

- (D_1) : a/ $\exists$ une mesure finie ν sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et un entier $\ell > 0$ tels que $P_\ell(x, A) \leq \nu(A)$.
 b/ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) = \Pi(A)$.

Alors, au lieu de la proposition I-1-1, nous avons la

PROPOSITION I-1-3. $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ vérifie (D_1) a/ avec $\ell = 1$, et b/ $\Rightarrow \{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ vérifie $(D_1) \Rightarrow \{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ vérifie (D) et (D_1) b/.

Démonstration. Il est clair que (D_1) a/ $\Rightarrow$ (D). En effet, il suffit de prendre dans (D), $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Remarquons maintenant que $P(x, A) \leq \nu(A) \Rightarrow P_\ell(x, A) \leq \nu(A)$, $\forall \ell > 1$. C'est

immédiat puisque $P_\ell(x, A) = \int_{\mathcal{X}} P_{\ell-1}(x, dy) P(y, A)$. $\forall \hat{A} \in \mathcal{B}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_k A_k \times B_k \text{ où } A_k, B_k \in \mathcal{B}, \text{ alors } \hat{P}_\ell[(x, y), \hat{A}] = \\ &= \sum_k \int_{A_k} P_{\ell-1}(y, du) P(u, B_k) \leq \sum_k P_{\ell-1}(y, A_k) \nu(B_k) \leq \hat{\nu}(\hat{A}). \end{aligned}$$

Il reste à montrer (D_1) b/. Or, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{P}[(x, y), \hat{A}] = \int_{\hat{A}} \Pi(du) P(u, dv) = \hat{\Pi}(\hat{A}), \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

Pour l'estimation, au lieu de (H_1^4) , faisons l'hypothèse suivante:

(H_1^5) : 1°/ $\exists$ une mesure finie $\nu(\cdot; \theta)$ sur $(\mathcal{X}, \beta)$ telle que $\forall \theta \in \Theta$
 $P(x, A; \theta) \leq \nu(A; \theta)$.

2°/ $\forall \theta \in \Theta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A; \theta) = \Pi(A; \theta)$.

3°/ $\exists$ une autre mesure μ sur $(\mathcal{X}, \beta)$ totalement σ -finie (terminologie de [21]), indépendante de θ , telle que $\forall \theta \in \Theta$ et $x \in \mathcal{X}$, $P(x, \cdot; \theta) \ll \mu$; la densité de Radon-Nikodym est supposée β^2 -mesurable mais non nécessairement bornée.

4°/ $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \tilde{\Pi}$ et $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} p$ existent et sont finies pour $v = 1, 2, 3$;

supposons de plus que $\int_{\mathcal{X}} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \tilde{\Pi}(x; \theta) \right| d\mu(x) < +\infty$,

$\int_{\mathcal{X}} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} p(x, y; \theta) \right| d\mu(y) < +\infty$, $\forall x \in \mathcal{X}$, pour $k = 1, 2$,

et $\int_{\mathcal{X}^2} \left(\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p(x, y; \theta) \right| \right) \Pi(dx; \theta) P(x, dy; \theta) \leq M$, où M est indépendante de θ .

5°/ $\forall \theta \in \Theta$, $\int_{\mathcal{X}^2} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x, y; \theta) \right|^{2+\delta} \Pi(dx; \theta) P(x, dy; \theta) < +\infty$
pour un $\delta > 0$.

Comme nous l'avons vu, avec la proposition I-1-3, l'hypothèse (D) est satisfaite sous (H_1^5) 1°/. De plus, (H_1^5) 4°/ permettent de permuter les signes $\int$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$, et donnent

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} p(x, y; \theta_0) d\mu(y) = \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} P(x, \mathcal{X}; \theta_0) = 0.$$

Enfin, $E \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } p(X, Y; \theta_1) \leq M$.

Ainsi, sous (H_1^5) , les lemmes 1 et 2 restent vrais. La première partie de la proposition I-1-2 reste donc vraie aussi.

Comme (H_1^5) 5°/ $\Rightarrow$ pour un $\delta > 0$,

$$E |f_{1 \circ \hat{X}_t}|^{2+\delta} = \int_{\mathcal{X}^2} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x, y; \theta_0) \right|^{2+\delta} \Pi(dx; \theta_0) P(x, dy; \theta_0) < \infty,$$

alors, nous pouvons réénoncer la proposition I-1-2 en y substi-

tuant l'hypothèse (H_1^5) à l'hypothèse (H_1^4) .

Mais si (H_1^5) 5° n'est pas vérifiée, nous n'aurons pas la loi de Laplace-Gauss. Cependant, un résultat plus faible peut être signalé. Pour cela, nous faisons appel à la notion de l' "efficacité au sens large". Elle a été introduite par Wald (cf. [27]), mais seulement avec la convergence en probabilité. Ici, nous précisons le mode de convergence, avec la définition suivante :

DEFINITION. L'estimateur θ_n^* est dit fortement (respectivement faiblement) efficace au sens large, s' $\exists$ une suite de v.a. du second ordre $\{Z_n\}$ telle que

1°/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} E Z_n = 0$,

2°/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Z_n\| = 1$,

3°/ $\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta_0) \right\| (\theta_n^* - \theta_0) - Z_n \rightarrow 0$ p.s. (resp. en probabilité).

Et nous sommes conduits à énoncer la

PROPOSITION I-1-4. Sous (H_1^5) de 1° à 4° ,

- (i) L'équation de vraisemblance (I-1-1) possède une racine simple $\theta_n^*(\omega)$ pour $n \geq N_0(\omega)$, où N_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s.
- (ii) L'estimateur θ_n^* est fortement efficace au sens large.

1.3. ETUDE DES FREQUENCES DE PASSAGE.

Soient A et $B \in \mathcal{B}$. Soit le morceau de trajectoire $X_t(\omega)$ correspondant à $\omega \in \Omega$, et $t \in [0, n]$. Désignons par $N_n(A \times B; \omega)$ le nombre de fois (éventuellement nul) que $X_t(\omega) \in A$ et $X_{t+1}(\omega) \in B$. Il est clair que $N_n(., \omega)$ est une mesure sur $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$ et à valeurs dans N , plus exactement à valeurs entières $\leq n$. Tandis que pour $A \times B$ fixé $\in \mathcal{B}^2$, $N_n(A \times B; .)$ est une

variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire $N_n(A \times B; \omega) = \sum_{t=1}^n [I_{A \times B} \circ \hat{X}_t](\omega)$.

Nous noterons par $N_n(A \times B)$ la variable aléatoire et par $N_n(A \times B; \omega)$ sa valeur correspondante à ω .

Nous sommes conduits à énoncer la

PROPOSITION I-1-5. Sous (H_1^4) 1° et 2°, (ou sous (H_1^5) 1° et 2°), quand $n \rightarrow +\infty$,

$$(i) \quad \frac{1}{n} N_n(A \times B) \longrightarrow \int_A \Pi(dx; \theta_0) P(x, B; \theta_0) \quad \text{en m.q. et p.s.}$$

$$(ii) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(A_1 \times B_1), \frac{1}{n} N_n(A_2 \times B_2) \right\rangle \longrightarrow \int_{A_1} \Pi(dx; \theta_0) P(x, B_1; \theta_0) \cdot \int_{A_2} \Pi(dx; \theta_0) P(x, B_2; \theta_0).$$

Démonstration.

Nous omettrons d'écrire le θ_0 dans les expressions des Π et P , d'abord pour simplifier l'écriture, ensuite parce que ces résultats peuvent être établis indépendamment de l'estimation de θ_0 .

(i) Il est clair que

$$(I-1-2) \quad E N_n(A \times B) = n E(I_{A \times B} \circ \hat{X}_t) = n \int_A \Pi(dx) P(x, B).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème ergodique p.219 de [13] pour obtenir la convergence p.s. Quant à la convergence en m.q. elle découle de la formule suivante

$$(I-1-3) \quad \left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) - \int_A \Pi(dx) P(x, B) \right\|^2 = \frac{1}{n} \int_A \Pi(dx) P(x, B) \left[1 - \int_A \Pi(dx) P(x, B) \right] \\ + \frac{2}{n} \int_A \Pi(dx) \int_B P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k-1}{n} \int_A [P_k(y, du) - \Pi(du)] P(u, B).$$

En effet, nous avons d'abord

$$(I-1-4) \quad \left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) \right\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \|I_{A \times B} \circ \hat{X}_t\|^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{t > \tau} \langle I_{A \times B} \circ \hat{X}_t, I_{A \times B} \circ \hat{X}_\tau \rangle$$

$$= \frac{1}{n} \int_A \Pi(dx) P(x, B) + \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \int_A \Pi(dx) \int_B P(x, dy) \int_A P_k(y, du) P(u, B),$$

avec la convention: $P_0(x, A) = I_A(x)$. (ce calcul a été fait pour le cas particulier où $\mathcal{X}$ est fini dans [19]).

D'où, puisque

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) - \int_A \Pi(dx) P(x, B) \right\|^2 &= \\ &= \left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) \right\|^2 - \left[\frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) + \frac{1}{n} \right] \left[\int_A \Pi(dx) P(x, B) \right]^2 \end{aligned}$$

car $2 \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) + n = n^2$, nous obtenons bien la formule I-1-3

Comme l'hypothèse (D) est satisfaite ici, $|P_k(y, A) - \Pi(A)| \leq \gamma \rho^k$, et en reprenant (I-1-3),

$$\left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) - \int_A \Pi(dx) P(x, B) \right\|^2 = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(ii) D'abord la formule

$$(I-1-5) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(A_1 \times B_1), \frac{1}{n} N_n(A_2 \times B_2) \right\rangle = \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n E \left[I_{(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)} \circ \hat{X}_t \right]$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{n^2} \sum_{t > \tau} \left\langle I_{A_1 \times B_1} \circ \hat{X}_t, I_{A_2 \times B_2} \circ \hat{X}_\tau \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{t < \tau} \left\langle I_{A_1 \times B_1} \circ \hat{X}_t, I_{A_2 \times B_2} \circ \hat{X}_\tau \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \int_{A_1 \cap A_2} \Pi(dx) P(x, B_1 \cap B_2) \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{A_1} \Pi(dx) \int_{B_1} P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-1)}{n} \int_{A_2} P_k(y, du) P(u, B_2) \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{A_2} \Pi(dx) \int_{B_2} P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-1)}{n} \int_{A_1} P_k(y, du) P(u, B_1). \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$(I-1-6) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(A_1 \times B_1) - \int_{A_1} \Pi(dx) P(x, B_1), \frac{1}{n} N_n(A_2 \times B_2) - \int_{A_2} \Pi(dx) P(x, B_2) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \int_{A_1 \cap A_2} \Pi(dx) P(x, B_1 \cap B_2) - \frac{1}{n} \int_{A_1} \Pi(dx) P(x, B_1) \cdot \int_{A_2} \Pi(dx) P(x, B_2) + \\
&+ \frac{1}{n} \int_{A_1} \Pi(dx) \int_{B_1} P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k-1}{n} \int_{A_2} [P_k(y, du) - \Pi(du)] P(u, B_2) + \\
&+ \frac{1}{n} \int_{A_2} \Pi(dx) \int_{B_2} P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k-1}{n} \int_{A_1} [P_k(y, du) - \Pi(du)] P(u, B_2) .
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\left\langle \frac{1}{n} N_n(A_1 \times B_1) - \int_{A_1} \Pi(dx) P(x, B_1), \frac{1}{n} N_n(A_2 \times B_2) - \int_{A_2} \Pi(dx) P(x, B_2) \right\rangle = 0 \left(\frac{1}{n} \right)$$

Ce qui démontre complètement la proposition. Signalons pour terminer, que si $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, la formule (I-1-6) se réduit bien à la formule (I-1-3).

1.4. QUELQUES REMARQUES.

1^o/ L'équation de vraisemblance (I-1-1) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\text{(I-1-7)} \quad \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n(\theta; \omega) &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } \tilde{\pi} [X_0(\omega); \theta] \\
&+ \frac{1}{n} \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x, y; \theta) dN_n(x, y; \omega) = 0 .
\end{aligned}$$

Nous pouvons établir la proposition I-1-2 à partir de l'équation (I-1-7). Cela ne présente aucune difficulté. Mais pour ne pas alourdir l'exposé, signalons simplement que l'étude directe de cette équation peut se faire de la même façon que dans le cas d'un processus permanent, cas qui sera traité plus loin, dans le chapitre II. D'ailleurs, au paragraphe 2 du présent chapitre, c'est (I-1-7) que nous utiliserons.

2^o/ Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, la généralisation au cas de plusieurs paramètres, $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(2)}) \in \textcircled{H}$ où $\textcircled{H}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^S$, peut se faire sans difficulté. On peut démontrer que, sous des conditions analogues à (H_1^4) par exemple, le système d'équations

$$\left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} L_n(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}; \omega) = 0 \right\}_{k=1, \dots, 2}$$

possède un système de racines que nous pouvons noter $\theta_n^* = (\theta_n^{(1)*}, \dots, \theta_n^{(s)*})$, dès que $n \geq N_0(\omega)$. Quand $n \rightarrow +\infty$, cette θ_n^* converge p.s. vers $\theta_0 = (\theta_0^{(1)}, \dots, \theta_0^{(s)})$. Quant à la loi asymptotique de $(\sqrt{n}(\theta_n^{(1)*} - \theta_0^{(1)}), \dots, \sqrt{n}(\theta_n^{(s)*} - \theta_0^{(s)}))$, elle est de Laplace-Gauss à s dimensions, de moyenne nulle et sa matrice de covariances σ a pour éléments

$$\sigma_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta^{(i)}} \text{Log } p(X, Y; \theta_0), \frac{\partial}{\partial \theta^{(j)}} \text{Log } p(X, Y; \theta_0) \right\rangle$$

1.5. ESTIMATION PAR LA METHODE DU ψ^2 MINIMUM.

Plaçons nous directement dans le cas de plusieurs paramètres. Soit E un ensemble fini d'indices, $E = \{1, \dots, r\}$. Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, c'est à dire telle que $A_i \in \mathcal{B}$, $\forall i \in E$, $\bigcup_{i \in E} A_i = \mathcal{X}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Posons

$$(I-1-8) \quad \psi_n^2(\theta; \omega) = \sum_{i, j \in E} \frac{\left[N_n(A_i \times A_j; \omega) - n \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \right]^2}{n \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta)}$$

Il s'agit de rendre minimum cette expression ; plus précisément, de choisir θ tel que l'expression ψ^2 soit minimum. Ce qui, sous des conditions de régularité, consiste à résoudre le système

$$(I-1-9) \quad \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \psi_n^2(\theta; \omega) = 0 \right\}_{k=1, 2, \dots, s}$$

qui s'écrit explicitement

$$(I-1-10) \quad \sum_{i, j} \left[\frac{N_n(A_i \times A_j; \omega) - n \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta)}{\int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta)} \right] +$$

$$+ \frac{\left[N_n(A_i \times A_j; \omega) - n \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \right]^2}{2n \left[\int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \right]^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) = 0. \right.$$

Nous avons vu que $\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) \rightarrow n \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0)$

p.s. et en m.q. (cf. proposition I-1-5). Pour n assez grand, le deuxième terme entre crochets de (I-1-10) est négligeable par rapport au premier. Comme pour le cas des variables aléatoires indépendantes (cf. [12]), nous considérons les équations modifiées $(k=1, \dots, s)$

$$(I-1-11) \quad \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} Y_n(\theta; \omega) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j} \left[N_n(A_i \times A_j; \omega) - n \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \log \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) = 0.$$

Un résultat peut être obtenu en raisonnant comme dans le cas des variables aléatoires indépendantes. Pour suivre ce raisonnement, il est commode d'ordonner totalement les éléments de $E \times E$. Par exemple, convenons de choisir l'application φ de $E \times E$ dans $E^* = \{1, 2, \dots, r^2\}$ telle que $(i, j) \xrightarrow{\varphi} r(i-1) + j$. Cette application φ est bijective. Il reste à poser des conditions analogues au cas des v.a. indépendantes.

Soit l'hypothèse suivante :

$$(H_1^6) : 1^\circ / (D_1) \text{ est satisfaite, } \forall \theta \in \Theta.$$

$$2^\circ / \forall \theta \in \Theta, P(x, X; \theta) = 1.$$

$$3^\circ / \exists \text{ un choix de la partition } \{A_i\}_{i \in E} \text{ tel que } s < r^2$$

$$\text{et que } \forall i, j \in E, \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) > 0.$$

$$4^\circ / \forall i, j \in E, \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^{(k)} \partial \theta^{(\ell)}} \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) \text{ existent, pour } k, \ell = 1, \dots, s.$$

5°/ Si nous posons $M_{ab} = \frac{\partial}{\partial \theta^{(b)}} \int_{A_i \times A_j} \Pi(dx; \theta) P(x, dy; \theta)$

avec $a = \varphi(i, j)$, la matrice (M_{ab}) est de rang s .

PROPOSITION I-1-6. Sous (H_1^6) , le système (I-1-11) possède un système de solutions $\theta_n^*(\omega) = (\theta_n^{(1)*}(\omega), \dots, \theta_n^{(s)*}(\omega))$ quand $n \geq N_0(\omega)$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ en probabilité, où $\theta_0 = (\theta_0^{(1)}, \dots, \theta_0^{(s)})$.

Démonstration. C'est la même que celle du cas des variables aléatoires indépendantes (cf. [12] p.427). Elle est applicable ici, puisque

$$E N_n(A \times B) = n \int_A \Pi(dx; \theta_0) P(x, B; \theta_0) \quad \text{et}$$

$$\left\| \frac{1}{n} N_n(A \times B) - n \int_A \Pi(dx; \theta_0) P(x, B; \theta_0) \right\| = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Nous ne la reproduisons pas ici.

Dans le but d'améliorer la proposition I-1-6, nous allons imposer d'autres hypothèses que (H_1^6) . Pour simplifier l'exposé, nous nous replaçons de nouveau dans le cas d'un seul paramètre.

(H_1^7) : 1°/ (D_1) est vérifiée, $\forall \theta \in \Theta$,

2°/ $P(x, \mathcal{X}; \theta) = 1$, $\forall \theta \in \Theta$,

3°/ $\exists$ une partition mesurable $\{A_i\}_{i \in E}$ de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ telle que

$$\forall i, j \in E, \quad \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) > 0$$

4°/ $\forall i, j \in E$, $\frac{d^v}{d\theta^v} \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta)$ existent et

sont bornées pour $v = 1, 2, 3$.

Nous remarquons tout de suite que l'équation (I-1-11) se réduit à

$$(I-1-12) \quad \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta; \omega) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i,j} N_n(A_i \times A_j; \omega) \frac{d}{d\theta} \log \int_{A_i} \pi(dx; \theta) P(x, A_j; \theta) = 0.$$

Cette équation n'est pas la même que celle donnée par la méthode du maximum de vraisemblance.

PROPOSITION I-1-7. Sous (H_1^7) ,

(i) Le système (I-1-12) possède une solution $\theta_n^*(\omega)$ pour $n \geq N_0(\omega)$ où N_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $n \rightarrow +\infty$, l'estimateur $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s.

(ii) $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\sigma = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|}{-\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n(\theta_0)}$$

Démonstration.

(i) Soit f_v , $v = 1, 2$, les applications mesurables de

$(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ telles que

$$f_v : (x, y) \longrightarrow \sum_{i,j \in E} I_{A_i \times A_j}(x, y) \cdot \frac{d^v}{d\theta^v} \log \int_{A_i} \pi(du; \theta_0) P(u, A_j; \theta_0)$$

et soit

$$f_3 : (x, y) \longrightarrow \sum_{i,j \in E} I_{A_i \times A_j}(x, y) \cdot \frac{d^3}{d\theta^3} \log \int_{A_i} \pi(du; \theta_1) P(u, A_j; \theta_1).$$

Nous avons

$$E \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) = \sum_{i,j} \frac{d}{d\theta} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0) = 0,$$

$$E \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n(\theta_0) = - \sum_{i,j} \frac{1}{\int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0)} \left(\frac{d}{d\theta} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0) \right)^2$$

Ainsi, d'après le théorème ergodique déjà cité (cf. [13] p. 219), quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_1 \circ \hat{X}_t \longrightarrow 0 \text{ p.s. ,}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_2 \circ \hat{X}_t \longrightarrow \text{un nombre} < 0 \text{ , p.s. ,}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_3 \circ \hat{X}_t \longrightarrow \sum_{i,j} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_1) P(x, A_j; \theta_1)$$

Et le reste de la démonstration du (i) est identique à celle faite pour la proposition I-1-2.

(ii) La condition $\int \chi^2 |f_1(x, y; \theta_0)|^{2+\delta} d\hat{\pi}(x, y; \theta_0) < +\infty$ pour

un $\delta > 0$ est satisfaite, $d\hat{\pi}(x, y; \theta_0)$ désignant $\pi(dx; \theta_0)P(x, dy; \theta_0)$.

Le théorème 7.5 , p.228 dans [13] montre que $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0; \omega) =$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n f_1 \circ \hat{X}_t$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne nulle et d'écart-type $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|$. Or ,

$$\sqrt{n} (\theta_n^* - \theta_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0)}{-\frac{1}{n} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n[\theta_0 + \eta (\theta_n^* - \theta_0)]}$$

D'où $\sqrt{n} (\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type σ (σ donné dans l'énoncé).

Il reste à calculer cette expression. Son dénominateur a été calculé. Examinons son numérateur. Puisque $E \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|^2 &= \frac{1}{n} \left\| \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) - E \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j} \left\| N_n(A_i \times A_j) - n \hat{\pi}(A_i \times A_j; \theta_0) \right\|^2 \left[\frac{d}{d\theta} \text{Log} \hat{\pi}(A_i \times A_j; \theta_0) \right]^2 \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k,\ell: \\ (i,j) \neq (k,\ell)}} \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} \text{Log} \hat{\pi}(A_i \times A_j; \theta_0) \cdot \frac{d}{d\theta} \text{Log} \hat{\pi}(A_k \times A_\ell; \theta_0) \end{aligned}$$

$$\times \left\langle N_n(A_i \times A_j) - n \hat{\Pi}(A_i \times A_j; \theta_0), N_n(A_k \times A_\ell) - n \hat{\Pi}(A_k \times A_\ell; \theta_0) \right\rangle.$$

En se servant des formules (I-1-3) et (I-1-6), des calculs nous conduisent — après simplification — à

$$\begin{aligned} \text{(I-1-13)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|^2 = \\ & = \sum_{i,j} \frac{1}{\int_{A_i} \Pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0)} \left[\frac{d}{d\theta} \int_{A_i} \Pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0) \right]^2 + \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k,\ell} \int_{A_i} \Pi(dx; \theta_0) \int_{A_j} P(x, dy; \theta_0) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_k} [P_m(y, du; \theta_0) - \Pi(du; \theta_0)] \times \\ & \times P(u, A_\ell; \theta_0) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i} \Pi(dx; \theta_0) P(x, A_j; \theta_0) \cdot \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_k} \Pi(dx; \theta_0) P(x, A_\ell; \theta_0), \end{aligned}$$

quantité finie, puisque

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \int_{A_k} [P_m(y, du; \theta_0) - \Pi(du; \theta_0)] P(u, A_\ell; \theta_0) \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} \rho^m < +\infty, \text{ où } 0 < \rho < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, à la différence de la vraisemblance, ici, nous voyons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|^2 \neq - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n(\theta_0).$$

1.6. LES ESTIMATEURS LINEAIRES.

Soit $f \circ X_t$ une fonction aléatoire liée à X_t . Nous savons que sous des hypothèses de régularité,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f \circ X_t \rightarrow E(f \circ X_0) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \Pi(dx; \theta_0).$$

Par définition, toute solution θ_n^* de l'équation

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} [f \circ X_t](\omega) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \Pi(dx; \theta)$$

s'appelle "estimateur linéaire" de θ_0 . De tels estimateurs ont été utilisés par exemple dans [16] et [17].

Si on admet la définition généralisée, selon laquelle la fonction f peut dépendre de θ , savoir $f[X_t(\omega); \theta]$, alors on appellera "estimateur linéaire généralisé" toute solution θ_n^* de l'équation

$$(I-1-14) \quad \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f[X_t(\omega); \theta] = \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) \Pi(dx; \theta),$$

car

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f[X_t(\omega); \theta_0] \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta_0) \Pi(dx; \theta_0).$$

Mieux, on peut considérer $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2) \xrightarrow{f} (R, \mathcal{R})$ et l'équation

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f[\hat{X}_t(\omega); \theta] = \int_{\mathcal{X}^2} f(x, y; \theta) \Pi(dx; \theta) P(x, dy; \theta).$$

Ainsi, si nous prenons par exemple $f(\hat{x}; \theta) = \frac{d}{d\theta} \text{Log } p(\hat{x}; \theta)$, l'équation (I-1-14) s'écrit

$$\frac{1}{n} \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } p(x, y; \theta) dN_n(x, y; \omega) = 0.$$

Dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini, cette équation était considérée par certains auteurs, comme l'équation de vraisemblance. En réalité, on a négligé le premier terme de cette équation. Et nous connaissons bien les propriétés des estimateurs donnés par cette équation.

Comme autres exemples d'estimateurs linéaires, si on prend $f = I_A$, $A \in \mathcal{B}$, on aura à résoudre l'équation

$$N_n(A \times \mathcal{X}; \omega) = n \Pi(A; \theta).$$

Ou encore, $f = I_{A \times B}$, alors on aura l'équation

$$N_n(A \times B; \omega) = n \int_A \Pi(dx; \theta) P(x, B; \theta).$$

Mais évidemment, une telle estimation conduite sur de tels exemples entraîne une trop grande perte d'information.

1.6. REMARQUE CONCERNANT LA METHODE DU χ^2 MINIMUM.

Nous allons considérer une expression qui pourrait être prise pour χ^2 . La justification de cette appellation sera donnée dans le § 2. Soit donc toujours $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition finie, mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Posons

$$(I-1-15) \quad \chi_n^2(\theta; \omega) = \sum_{i, j \in E} \frac{\left[N_n(A_i \times A_j; \omega) - \int_{A_i \times \mathcal{X}} P(x, A_j; \theta) dN_n(x, y; \omega) \right]^2}{\int_{A_i \times \mathcal{X}} P(x, A_j; \theta) dN_n(x, y; \omega)}$$

Nous remarquons tout de suite que

$$E N_n(A_i \times A_j) = E \int_{A_i \times \mathcal{X}} P(x, A_j; \theta_0) dN_n(x, y) = \int_{A_i} P(x, A_j; \theta_0) \Pi(dx; \theta_0)$$

(I-1-15) nous conduit à l'équation du χ^2 modifiée suivante:

$$(I-1-16) \quad \frac{1}{n} \sum_{i, j} N_n(A_i \times A_j; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i \times \mathcal{X}} P(x, A_j; \theta) dN_n(x, y; \omega) = 0.$$

Sauf dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini, nous n'avons pas su démontrer, jusqu'à présent, l'existence d'une racine convergente de cette équation. Signalons enfin que, d'après calculs,

$$(I-1-17) \quad \left\langle N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i \times \mathcal{X}} P(x, A_j) dN_n(x, y), N_n(A_k \times A_\ell) - \int_{A_k \times \mathcal{X}} P(x, A_\ell) dN_n(x, y) \right\rangle$$

$$= n \int_{A_i \cap A_k} \Pi(dx) \left[P(x, A_j \cap A_\ell) - P(x, A_j) P(x, A_\ell) \right]$$

Cette formule nous servira plus tard, dans l'étude du cas où l'espace des états est fini.

§2. CAS OU $\mathcal{X}$ EST FINI .

Supposons que $\mathcal{X}$ ne comporte qu'un nombre fini d'états notés $1, 2, \dots, r$. A la place de l'opérateur P_t , nous avons une matrice carrée (r, r) : $P = (p_{ij})$ pour $t = 1$, et

$$P_t = P^t = (p_{ij}^t) \text{ pour } t \text{ entier } > 1 .$$

Ce cas a été traité dans [19], [8], et [6]. De nombreux autres auteurs non cités ici l'ont aussi étudié. Pour plus de détails sur ces travaux, nous renvoyons à la liste bibliographique de [5], la plus récente en date. Nous en reprenons ici l'étude. Certains calculs ne seront pas faits: ils proviennent des formules établies dans le §1.

Rappelons que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

- a/ I désignant la matrice identité, l'équation en λ , $|P - \lambda I| = 0$ possède 1 comme racine simple et n'a pas d'autre racine de module 1 que 1.
- b/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ existe et est indépendante de i , $\forall i, j \in \mathcal{X}$.
- c/ $\exists$ une seule classe ergodique sans sous-classes cycliques.
- d/ $\exists j_0 \in \mathcal{X}$ et $n_0 \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que $p_{ij_0}^{(n_0)} > 0$, $\forall i \in \mathcal{X}$.

Un tel cas est appelé "cas régulier" dans [18], mais vue l'utilisation trop courante de ce terme, nous préférons dire que le processus $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ vérifie l'hypothèse (H_2) lorsque l'une de ces quatre propriétés est vérifiée.

Nous savons que sous (H_2) , le vecteur ligne d'éléments π_j , vecteur que nous notons π , est unique (cf. [7]). Soit maintenant $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ la fonction aléatoire strictement stationnaire du processus, ayant π pour vecteur des probabilités absolues. L'observation sera faite pour cette fonction aléatoire de $t=0$ à $t=n$. Avec la trajectoire correspondante à $\omega \in \Omega$, notons $N_n(ij; \omega)$

le nombre de fois (éventuellement nul) que $X_t(\omega) = i$ et $X_{t+1}(\omega) = j$, $0 \leq t \leq n-1$.

Si nous convenons d'ordonner les éléments de $\mathcal{X}^2$ à l'aide de l'application φ (cf. §1, p. 22) telle que $(i, j) \xrightarrow{\varphi} r(i-1)+j$, alors la matrice $\hat{P}$ s'écrira

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & p_{21} & \dots & p_{2s} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & p_{s1} & \dots & p_{ss} \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} & 0 & \dots & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

PROPOSITION I-2-1. $\hat{P}$ possède r racines caractéristiques qui sont les mêmes que celles de P , et $r(r-1)$ racines caractéristiques toutes égales à 0.

Démonstration.

Les calculs en détail ont été faits dans [8]. En voici l'essentiel. Dans $|\hat{P} - \lambda I| = 0$, additionnons toutes les colonnes numéros $(kr+i)$, $1 \leq i \leq r$, $k = 0, 1, \dots, r-1$; puis soustrayons la i -ème ligne de la $(kr+i)$ -ème ligne (respectivement $k = 1, 2, \dots, r-1$), nous obtiendrons

$$|\hat{P} - \lambda I| = (-\lambda)^{r(r-1)} |P - \lambda I|.$$

Signalons que le signe $-$ devant λ dépend de φ , c'est à dire du numérotage des états dans $\mathcal{X}^2$.

COROLLAIRE. $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ vérifie $(H_2) \implies \{\hat{P}_t, t \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ vérifie (H_2)

D'ailleurs, ce résultat peut aussi découler soit de l'étude faite dans le §1, soit du fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij, k\ell}^{(n)} = \hat{\pi}_{k\ell} = \pi_k p_{k\ell}.$$

2.1. ETUDE DES $N_n(ij)$.

Les résultats établis dans le paragraphe précédent sont évidemment valables et s'écrivent ici, toujours avec la convention

$$p_{jk}^{(0)} = \delta_{jk} ,$$

$$(I-2-1) \quad E N_n(ij) = n \prod_i p_{ij} .$$

$$(I-2-2) \quad \left\| \frac{N_n(ij)}{n} \right\|^2 = \frac{1}{n} \prod_i p_{ij} + \frac{2}{n} \prod_i p_{ij}^2 \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} p_{ji}^{(m)} .$$

$$(I-2-2 \text{ bis}) \quad \left\| \frac{1}{n} N_n(ij) - \prod_i p_{ij} \right\|^2 = \frac{1}{n} \prod_i p_{ij} (1 - \prod_i p_{ij}) + \frac{2}{n} \prod_i p_{ij}^2 \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} (p_{ji}^{(m)} - \prod_i) .$$

Mieux,

$$(I-2-3) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(ij) , \frac{1}{n} N_n(k\ell) \right\rangle = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{j\ell} \prod_i p_{ij} + \frac{1}{n} \prod_i p_{ij} p_{k\ell} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} p_{jk}^{(m)} + \frac{1}{n} \prod_k p_{k\ell} p_{ij} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} p_{\ell i}^{(m)} .$$

$$(I-2-3 \text{ bis}) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(ij) - \prod_i p_{ij} , \frac{1}{n} N_n(k\ell) - \prod_k p_{k\ell} \right\rangle = \frac{1}{n} (\delta_{ik} \delta_{j\ell} - \prod_k p_{k\ell}) \prod_i p_{ij} + \frac{1}{n} \prod_i p_{ij} p_{k\ell} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} (p_{jk}^{(m)} - \prod_k) + \frac{1}{n} \prod_k p_{k\ell} p_{ij} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{n-m-1}{n} (p_{\ell i}^{(m)} - \prod_i) .$$

Et nous avons la

PROPOSITION I-2-2. Sous (H_2) , quand $n \rightarrow +\infty$,

$$(i) \quad \frac{1}{n} N_n(ij) \rightarrow \prod_i p_{ij} \quad \text{p.s. et en m.q.}$$

$$(ii) \quad \left\langle \frac{1}{n} N_n(ij) , \frac{1}{n} N_n(k\ell) \right\rangle \rightarrow \prod_i p_{ij} \prod_k p_{k\ell} , \text{ si } (i,j) \neq (k,\ell) .$$

2. ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Nous voulons estimer θ_0 , valeur vraie de $\theta \in \Theta$, qui figure dans $p_{ij}^{<t>}(\theta)$.

L'équation de vraisemblance (I-1-7) du §1 s'écrit ici

$$(I-2-4) \quad \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} L_n(\theta; \omega) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} \text{Log } \Pi_{X_0}(\omega) + \\ + \frac{1}{n} \sum_{i,j \in \mathcal{X}} N_n(ij; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log } p_{ij}(\theta) = 0.$$

Comme cas particulier du lemme 2 du §1, nous avons ici, sous l'hypothèse (H_2)

$$(I-2-5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} L_n(\theta_0) \right\|^2 = -\lim_{n \rightarrow +\infty} E \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\theta^2} L_n(\theta_0) \\ = \sum_{i,j} \frac{\Pi_i(\theta_0)}{p_{ij}(\theta_0)} \left[\frac{d}{d\theta} p_{ij}(\theta_0) \right]^2.$$

Et nous avons la

PROPOSITION I-2-3. Sous (H_2) , si $\frac{d^v}{d\theta^v} \Pi_i(\theta)$ et $\frac{d^v}{d\theta^v} p_{ij}(\theta)$, $(v=1,2,3)$ existent et sont bornées sur Θ , alors

(i) L'équation de vraisemblance (I-3-4) possède une racine simple notée $\theta_n^*(\omega)$, pour $n \geq N_0(\omega)$ où N_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s.

(ii) $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\left[\sum_{i,j} \frac{\Pi_i(\theta_0)}{p_{ij}(\theta_0)} \left(\frac{d}{d\theta} p_{ij}(\theta_0) \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Dans le cas de plusieurs paramètres, $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)})$, nous avons un énoncé analogue.

APPLICATIONS. Certains résultats ci-dessous sont connus (voir par exemple [3] pour la loi des $N_n(ij)$, ou [23] pour l'estimation des p_{ij}). Nous les présenterons brièvement et sans démonstration.

— 1^o/ Estimation des probabilités de passage p_{ij} .

Ici, les p_{ij} jouent le rôle des paramètres à estimer; ils sont liés entre eux par les relations

$$F_i = \sum_j p_{ij} - 1 = 0, \quad \forall i \in \mathcal{X}.$$

Notons par p_{ij}^* l'estimateur de p_{ij} par la méthode du maximum de vraisemblance, alors

PROPOSITION I-2-4.

$$(i) \quad p_{ij}^* = \frac{N_n(ij)}{N_n(i\mathcal{X})}$$

(ii) p_{ij}^* converge p.s. vers p_{ij}^0 quand $n \rightarrow +\infty$, p_{ij}^0 désignant la valeur vraie de p_{ij} .

(iii) $\sqrt{n}(p_{ij}^* - p_{ij}^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type $\sqrt{\frac{1}{\pi_i^0} p_{ij}^0 (1 - p_{ij}^0)}$.

— 2^o/ Estimation des π_i , compatible avec les p_{ij}^* donnés ci-dessus. Par compatibilité, nous désignons le fait que la relation matricielle $\Pi P = \Pi$ est vérifiée.

Supposons que l'on observe X_t de $t=0$ à $t=n$. Alors $\forall \omega \in \Omega$ et $\forall i \in \mathcal{X}$, $N_n(i\mathcal{X}; \omega) - N_n(\mathcal{X}i; \omega) = \delta_{iX_0}(\omega) - \delta_{iX_n}(\omega)$.

Si nous supposons que $X_n(\omega) = X_0(\omega)$, alors $N_n(\mathcal{X}i; \omega) = N_n(i\mathcal{X}; \omega)$. Dans ce cas, il est facile de voir que *

PROPOSITION I-2-5.

(i) Les π_i^* tels que $\pi_i^* = \frac{1}{n} N_n(i\mathcal{X})$ sont des estimateurs de π_i^0 , compatibles avec les p_{ij}^* de la proposition I-2-4.

(ii) π_i^* est sans biais : $E \pi_i^* = \pi_i^0$.

(iii) Quand $n \rightarrow +\infty$, $\pi_i^* \rightarrow \pi_i^0$ p.s. et en m.q.

(iv) $\sqrt{n}(\pi_i^* - \pi_i^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\sqrt{2 \pi_i^0 \sum_{m=0}^{\infty} (p_{ii}^{0 \langle m+1 \rangle} - \pi_i^0) + \pi_i^0(1 - \pi_i^0)} .$$

2.3. ESTIMATION PAR LA METHODE DU Ψ^2 MINIMUM.

Rappelons que (cf. [28]) la loi jointe des $N_n(ij)$ est une loi multinomiale généralisée. Plus précisément,

$$\Pr \left\{ N_n(jk) = n_{jk}; j, k \in \mathcal{X} \mid X_0(\omega) = \alpha, X_n(\omega) = \beta \right\} \\ = C_{\beta}(n_{jk}) \frac{\prod_j (\sum_k n_{jk})!}{\prod_{jk} n_{jk}!} \prod_{jk} (p_{jk})^{n_{jk}},$$

où $C_{\beta}(n_{jk})$ désigne le cofacteur (β, α) du déterminant de la matrice $(\delta_{jk} - \frac{n_{jk}}{\sum_m n_{jm}})$, et où $n > r$ et $\sum_k n_{jk} > 0$, $j = 1, \dots, r$.

La partition de $\mathcal{X}$ est ici naturelle.

Plaçons nous dans le cas d'un paramètre pour simplifier l'exposé. L'équation modifiée (I-1-11) devient ici

$$(I-2-6) \quad \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta; \omega) = \\ \frac{1}{n} \sum_{i,j} \left[N_n(ij; \omega) - n \pi_i(\theta) p_{ij}(\theta) \right] \frac{d}{d\theta} \text{Log} [\pi_i(\theta) p_{ij}(\theta)] = 0 .$$

Si nous supposons que $\sum_j p_{ij}(\theta) = 1$, $\forall \theta \in \Theta$, alors l'équation précédente se réduit à

$$(I-1-7) \quad \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta; \omega) = \frac{1}{n} \sum_i N_n(i\mathcal{X}; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \pi_i(\theta) + \\ + \frac{1}{n} \sum_{i,j} N_n(ij; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} p_{ij}(\theta) = 0 .$$

Nous vérifions bien encore une fois que cette équation n'est pas équivalente à celle de vraisemblance (I-2-4). La proposition I-1-7 se transpose facilement dans notre cas particulier

PROPOSITION I-2-6. Sous (H_2) ,

- (i) L'équation (I-2-7) possède une racine $\theta_n^*(\omega)$ pour $n \geq N_0(\omega)$ où N_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s.
- (ii) $\sqrt{n} (\theta_n^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} Y_n(\theta_0) \right\|}{- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n(\theta_0)}.$$

APPLICATION : Estimation de P et de Π .

Ici, les "paramètres" à estimer sont $\{p_{jk}^0, \pi_j^0\}_{j,k \in \mathcal{X}}$, reliés entre eux par les relations

$$F_i \equiv \sum_j p_{ij} - 1 = 0, \quad \forall i \in \mathcal{X}$$

$$\text{et } G \equiv \sum_i \pi_i - 1 = 0.$$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, les équations (I-2-7) s'écrivent ici: $\forall i, j \in \mathcal{X}$,

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} Y_n + \sum_{k \in \mathcal{X}} \lambda_k \frac{\partial}{\partial p_{ij}} F_k + \lambda \frac{\partial}{\partial p_{ij}} G \Big|_{p_{ij} = p_{ij}^*} = 0,$$

et

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \pi_i} Y_n + \sum_{k \in \mathcal{X}} \lambda_k \frac{\partial}{\partial \pi_i} F_k + \lambda \frac{\partial}{\partial \pi_i} G \Big|_{\pi_i = \pi_i^*} = 0.$$

Les premières donnent

$$p_{ij}^* = \frac{N_n(ij)}{N_n(i\mathcal{X})}$$

et les secondes

$$\pi_i^* = \frac{1}{n} N_n(i\mathcal{X}) ,$$

résultats qui coïncident avec ceux donnés par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons donc un énoncé analogue à l'ensemble des 2 propositions I-2-4 et I-2-5.

2.4. METHODE DU χ^2 MINIMUM.

Considérons directement le cas de plusieurs paramètres. Soit donc $\theta \in \Theta$ ouvert de $\mathbb{R}^s$. L'expression (I-1-15) devient ici

$$(I-2-8) \quad \chi_n^2(\theta; \omega) = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{[N_n(ij; \omega) - p_{ij}(\theta) N_n(i\mathcal{X}; \omega)]^2}{p_{ij}(\theta) N_n(i\mathcal{X}; \omega)}$$

L'équation (I-1-16) a une expression plus simple:

$$(I-2-9) \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i,j \in \mathcal{X}} N_n(ij; \omega) \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \text{Log } p_{ij}(\theta) = 0 \right\}_{k=1,2,\dots,s}.$$

Ce n'est autre que l'équation de vraisemblance dont le premier terme est négligé.

Le théorème suivant a été donné par Billingsley dans [5], (nous considérons toujours l'ordre établi dans $\mathcal{X}^2$ par φ défini dans le §1), nous modifions ici un peu les notations.

PROPOSITION I-2-7. Sous (H_2) , et si la matrice $r^2 \times s$ d'éléments

$$d_{r(i-1)+j,k} = \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} p_{ij}(\theta) \text{ est de rang } s, \text{ alors}$$

- (i) $\exists$ une solution de $\theta_n^*(\omega)$ de (I-2-9) pour $n \geq N_0(\omega)$ telle que $\theta_n^* \rightarrow \theta_0$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$.
- (ii) La v.a. $\chi_n^2(\theta_n^*)$ définie par (I-2-8), (où on a remplacé θ par θ_n^*), suit asymptotiquement une loi du χ^2 à $r(r-1)-s$ degrés de liberté.

Nous ne reproduisons pas ici la démonstration de cette proposition. Remarquons seulement qu'à l'aide des formules (I-2-3), on voit facilement que

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \left[N_n(ij) - N_n(i\mathcal{X}) p_{ij} \right], \frac{1}{\sqrt{n}} \left[N_n(k\ell) - N_n(k\ell) p_{k\ell} \right] \right\rangle \longrightarrow$$

$$\delta_{ik} \pi_i p_{ij} (\delta_{j\ell} - p_{i\ell}) \quad , \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

et de là, que la matrice des covariances de la loi limite de la

$$\text{v.a.} \quad \left(\frac{N_n(ij) - N_n(i\mathcal{X}) p_{ij}}{\sqrt{N_n(i\mathcal{X})}} \right)_{i,j} \quad \text{a pour éléments } \delta_{ik} p_{ij} (\delta_{j\ell} - p_{i\ell})$$

C H A P I T R E II

ESTIMATION DANS DES PROCESSUS DE MARKOV PERMANENTS.

Le présent chapitre est consacré aux processus permanents. Comme le précédent, il comporte deux paragraphes : le premier traite le cas où l'espace des états est un ensemble borélien de la droite R ; le second, celui où il n'y a qu'un nombre fini d'états.

§1. CAS GENERAL.

Soit $\mathcal{X}$ un borélien de la droite, $\mathcal{B}$ la tribu formée par les boréliens $\subset \mathcal{X}$. Dans ce cas, nous savons que $\forall x \in \mathcal{X}$, $\{x\} \in \mathcal{B}$. Soit un processus de Markov homogène, permanent, noté $\{P_t, t \in R_+\}$, dont l'espace des états est $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Appelons (C) la condition suivante : $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, \{x\}) = 1$, uniformément en x . Rappelons que, sous (C),

$$1^\circ/ \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_t(x, \{x\})}{t} = Q(x) \leq M < +\infty.$$

Cette limite est atteinte uniformément en x .

$$2^\circ/ \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P_t(x, A) = Q(x, A) \leq Q(x) \quad \text{si } x \notin A, \text{ et } Q(x, \cdot) \\ \text{est } \sigma\text{-additive sur } \mathcal{X} - \{x\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

$$3^\circ/ \quad Q(x, \mathcal{X} - \{x\}) = Q(x).$$

(cf. [13]).

Convention: nous poserons, dans ce qui suit, $Q(x, \{x\}) = 0$, ce qui nous permettra d'écrire $Q(x, \mathcal{X} - \{x\}) = Q(x, \mathcal{X})$.

1.1. REMARQUE PRELIMINAIRE.

Notons par $P_t^{<n>}(x, A)$ la probabilité de passer de x à A en un temps t , après n sauts, ($n \geq 0$). Posons

$$\bar{P}_t(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_t^{<n>}(x, A).$$

Sous l'hypothèse (C), nous avons $\bar{P}_t(x, \mathcal{X}) = 1$. En effet, cette égalité est équivalente au résultat suivant : l'équation

$$\int_{\mathcal{X}} Q(x, dy) g(y) = [\lambda + Q(x)] g(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (\text{où } \lambda \text{ est un}$$

réel > 0 fixé) n'a pas de solution $g > 0$ bornée non nulle.

Or ce résultat est vrai ici, puisque $Q(x) \leq M$, d'après (C).

1.2. DUREES DE SEJOUR ET FREQUENCES DE PASSAGE .

L'étude des durées de séjour et des fréquences de passage nécessite des conditions suivantes, groupées dans l'hypothèse

(H₃¹) : a/ (C) est vérifiée.

b/ La condition (D) de Doeblin est vérifiée, et de plus,
 $\forall A \in \mathcal{B}, \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(x, A) = \Pi(A)$ est indépendante de x .

Rappelons que (D) est la condition selon laquelle : $\exists$ une mesure finie ν sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, un $\varepsilon > 0$ et un $s > 0$ tels que $\nu(A) \leq \varepsilon \Rightarrow P_s(x, A) \leq 1 - \varepsilon$. Nous savons que sous (D), $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(x, A)$ existe et est atteinte exponentiellement vite (cf. [13]), et d'après b/, sa limite Π indépendante de x , est une mesure de probabilité

sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Considérons maintenant la f.a. $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ du processus, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$, à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et ayant Π pour probabilité absolue stationnaire.

Pour un $\omega \in \Omega$, considérons la trajectoire $X_t(\omega)$, pour $t \in [0, T]$. Désignons par $\tau_T(A; \omega)$ la durée totale de séjour dans $A \in \mathcal{B}$; par $N_T(A \times B; \omega)$ le nombre de fois que la f.a. passe de l'un des états de A à l'un des états de $B \in \mathcal{B}$. $\forall \omega \in \Omega$, $\tau_T(., \omega)$ est une mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, à valeurs dans $[0, T]$. De même, $\forall \omega \in \Omega$, $N_T(., \omega)$ est une mesure sur $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. $\tau_T(., \omega)$ et $N_T(., \omega)$ sont respectivement les durées de séjour et les fréquences de passage dans l'observation permanente correspondante à $\omega \in \Omega$ et à $[0, T]$. Convention: $N_T(\{x\} \times \{x\}; \omega) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Faisons le partage diadique de $[0, T]$: soit $2^{-m} \cdot T = \Delta t$. Posons $\frac{T}{\Delta t} = N_{\Delta t, T}$ pour des raisons de commodité d'écriture. Quand $m \rightarrow +\infty$, $\Delta t \rightarrow 0$; nous convenons d'écrire simplement $\Delta t \rightarrow 0$.

Soit $\{\hat{X}_{j\Delta t}, j \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$, qui est définie de la façon suivante:
 $\hat{X}_{j\Delta t}(\omega) = (x, y)$ si $X_{(j-1)\Delta t}(\omega) = x$ et $X_{j\Delta t}(\omega) = y$.

Si $I_{A \times B}$ désigne l'indicateur de l'ensemble $A \times B$, il est clair alors que

$$N_{\Delta t, T}(A \times B; \omega) = \sum_{j=1}^{N_{\Delta t, T}} [I_{A \times B} \circ \hat{X}_{j\Delta t}](\omega)$$

est le nombre de fois que $X_{(j-1)\Delta t}(\omega) \in A$ et $X_{j\Delta t}(\omega) \in B$. (Observation discrète périodique correspondante à ω , $\Delta t = 2^{-m} \cdot T$ et $[0, T]$).

Pour A et B fixés $\in \mathcal{B}$, $N_{\Delta t, T}(A \times B; .)$ est une v.a., somme des v.a. $I_{A \times B} \circ \hat{X}_{j\Delta t}$. Notons par D^c le complémentaire de la diagonale de $\mathcal{X}^2$.

Quand $m \rightarrow +\infty$, $\Delta t \rightarrow 0$, alors $\forall A$ et $B \in \mathcal{B}$, $N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c; \omega] \rightarrow N_T(A \times B; \omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. En particulier, si

$A \cap B = \emptyset$, (c'est à dire $(A \times B) \cap D = \emptyset$), alors $N_{\Delta t, T}(A \times B; \omega) \rightarrow N_T(A \times B; \omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. D'autre part, $\Delta t \cdot N_{\Delta t, T}(A \times A; \omega) \rightarrow \tau_T(A; \omega)$,

$\forall \omega \in \Omega$. Il est clair alors que $N_n(A \times B; \cdot)$ et $\tau_T(A; \cdot)$ sont des v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$. Nous noterons par $N_T(A \times B)$ et $\tau_T(A)$ les v.a. et par $N_T(A \times B; \omega)$ et $\tau_T(A; \omega)$ leurs valeurs.

PROPOSITION II-1-2. Sous (H_3^1) , quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(i) \quad \forall A \in \mathcal{B}, \quad \left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) - \Pi(A) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{et aussi} \quad \frac{1}{T} \tau_T(A) \rightarrow \Pi(A) \quad \text{p.s.}$$

$$(ii) \quad \forall A \text{ et } B \in \mathcal{B}, \quad \left\| \frac{1}{T} N_T(A \times B) - \int_A \Pi(dx) Q(x, B) \right\| \rightarrow 0.$$

Démonstration.

De façon précise, on a

$$(II-1-1) \quad E \tau_T(A) = T \Pi(A)$$

$$(II-1-2) \quad \left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) - \Pi(A) \right\|^2 = \frac{2}{T^2} \int_A \Pi(dx) \int_0^T dt (T-t) [P_t(x, A) - \Pi(A)]$$

$$(II-1-3) \quad E N_T(A \times B) = T \int_A \Pi(dx) Q(x, B).$$

$$(II-1-4) \quad \left\| \frac{1}{T} N_T(A \times B) - \int_A \Pi(dx) Q(x, B) \right\|^2 = \frac{1}{T} \int_A \Pi(dx) Q(x, B) + \\ + \frac{2}{T} \int_A \Pi(dx) \int_B Q(x, dy) \int_0^T dt \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_A [P_t(y, dz) - \Pi(dz)] Q(z, B)$$

Les calculs sont longs. Nous les ferons d'abord pour les espérances mathématiques, ensuite pour les variances.

a/ Reprenons le partage $T = N_{\Delta t, T} \Delta t$ avec $\Delta t = 2^{-m} T$. Comme dans le cas fini, on a $0 \leq N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t \leq T$; et $N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t \rightarrow \tau_T(A)$ p.s. D'où d'après le théorème de Fatou-Lebesgue (cf. p.125 dans [24]), quand $\Delta t \rightarrow 0$, $E N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t \rightarrow E \tau_T(A)$.

Raisonnement analogue pour montrer que $\|N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t\| \rightarrow \|\tau_T(A)\|$.

Remarquons maintenant qu'avec le partage $2^{-m} T = \Delta t$, quand $m \rightarrow +\infty$, $\Delta t \rightarrow 0$, et $N_{\Delta t, T}(D^C; \omega) \uparrow N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X}; \omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Donc, d'après le théorème de convergence monotone (cf. [24] p.124)

$$E N_{\Delta t, T}(D^c) \uparrow E N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X}), \text{ et } \|N_{\Delta t, T}(D^c)\| \uparrow \|N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})\|.$$

Or, dans ce qui suit, nous montrons que sous (H_3^1) ,

$$E N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) < +\infty \text{ et } \|N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})\| < +\infty. \text{ L'application du théorème de Fatou-Lebesgue donne: } E N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c] \rightarrow E N_T(A \times B) \text{ et } \|N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c]\| \rightarrow \|N_T(A \times B)\|, \forall A \text{ et } B \in \mathcal{B}, \text{ puisque } N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c; \omega] \rightarrow N_T(A \times B; \omega), \text{ et que } 0 \leq N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c; \omega] \leq N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X}; \omega), \forall \omega \in \Omega.$$

$$b/ \text{ Nous savons que } E N_{\Delta t, T}(A \times A) = N_{\Delta t, T} \int_A \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, A).$$

D'où, d'après (C) et a/, quand $m \rightarrow +\infty, \Delta t \rightarrow 0$,

$$(II-1-1) \quad E \tau_T(A) = T \Pi(A).$$

Pour A et $B \in \mathcal{B}$, si $\delta(x, y) = 1$ pour $x=y$, et $= 0$ pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \left[I_{(A \times B) \cap D^c} \circ \hat{X}_{j\Delta t} \right](\omega) &= 1 \text{ avec la probabilité } \int_{A \times B} [1 - \delta(x, y)] \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, dy) \\ &= 0 \text{ avec la probabilité complémentaire.} \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons } E N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c] = N_{\Delta t, T} \int_{(A \times B) \cap D^c} \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, dy).$$

Quand $m \rightarrow +\infty, \Delta t \rightarrow 0$, nous obtenons d'après a/

$$(II-1-3) \quad E N_T(A \times B) = T \int_A \Pi(dx) Q(x, B).$$

Calculons maintenant $\|N_T[(A \times B) \cap D^c]\|^2$. Nous avons, d'après (I-1-7) du chapitre I,

$$\begin{aligned} \|N_{\Delta t, T}[(A \times B) \cap D^c]\|^2 &= N_{\Delta t, T} \int_{(A \times B) \cap D^c} \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, dy) + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{N_{\Delta t, T}-2} (N_{\Delta t, T} - k - 1) \int_{(A \times B) \cap D^c} \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, dy) \int_{(A \times B) \cap D^c} P_{k\Delta t}(y, dz) \\ &\quad \times P_{\Delta t}(z, du). \end{aligned}$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$, toujours d'après a/, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \|N_T(A \times B)\|^2 &= T \int_A \pi(dx) Q(x, B) + \\ &+ 2 \int_0^T dt (T-t) \int_A \pi(dx) \int_B Q(x, dy) \int_A P_t(y, dz) Q(z, B). \end{aligned}$$

Et puisque $\frac{2}{T^2} \int_0^T (T-t) dt = 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \text{(II-1-4)} \quad \left\| \frac{1}{T} N_T(A \times B) - \int_A \pi(dx) Q(x, B) \right\|^2 &= \frac{1}{T} \int_A \pi(dx) Q(x, B) + \\ &+ \frac{2}{T} \int_A \pi(dx) \int_B Q(x, dy) \int_0^T dt \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_A \left[P_t(y, dz) - \pi(dz) \right] Q(z, B). \end{aligned}$$

Comme $Q(z, B) \leq Q(z) \leq M < +\infty$, et d'après le théorème 2-1 de [13], p. 256, $|P_t(y, A) - \pi(A)| < \rho^t$, où γ et ρ sont deux constantes > 0 , avec $0 < \rho < 1$. D'où

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} N_T(A \times B) - \int_A \pi(dx) Q(x, B) \right\|^2 &\leq \frac{1}{T} \int_A \pi(dx) Q(x, B) + \\ &+ 2\gamma \frac{M}{T} \int_A \pi(dx) Q(x, B) \int_0^T \rho^t \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = o\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Le calcul de $\left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) \right\|^2$ se fait de la même façon. On calcule $\left\| N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t \right\|^2$; puis on fait $\Delta t \rightarrow 0$; on obtient alors

$$\left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) \right\|^2 = \frac{2}{T^2} \int_A \pi(dx) \int_0^T dt (T-t) P_t(x, A).$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{(II-1-2)} \quad \left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) - \pi(A) \right\|^2 &= \frac{2}{T^2} \int_A \pi(dx) \int_0^T dt (T-t) \left[P_t(x, A) - \pi(A) \right] \\ &\leq \frac{2}{T^2} \gamma \pi(A) \cdot \int_0^T dt (T-t) \rho^t = o\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Quant à la convergence p.s. de $\frac{1}{T} \tau_T(A)$ vers $\pi(A)$, elle peut se démontrer sans difficulté.

PROPOSITION II-1-3. Sous (H_3^1) , quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(i) \quad \left\langle \frac{1}{T} \tau_T(A), \frac{1}{T} \tau_T(B) \right\rangle \rightarrow \pi(A) \cdot \pi(B), \quad \forall A \text{ et } B \in \mathcal{B};$$

$$(ii) \quad \left\langle \frac{N_T(A_1 \times B_1)}{T}, \frac{N_T(A_2 \times B_2)}{T} \right\rangle \rightarrow \int_{A_1} \Pi(dx) Q(x, B_1) \cdot \int_{A_2} \Pi(dx) Q(x, B_2), \quad \forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}.$$

$$(iii) \quad \left\langle \frac{\tau_T(A)}{T}, \frac{N_T(B \times C)}{T} \right\rangle \rightarrow \Pi(A) \cdot \int_B \Pi(dx) Q(x, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{B}.$$

Démonstration.

a/ Il est facile de voir que, quand $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\left\langle \Delta t N_{\Delta t, T}(A \times A), \Delta t N_{\Delta t, T}(B \times B) \right\rangle \rightarrow \left\langle \tau_T(A), \tau_T(B) \right\rangle,$$

d'après a/ de la proposition II-1-2. De même,

$$\left\langle N_{\Delta t, T}[(A_1 \times B_1) \cap D^c], N_{\Delta t, T}[(A_2 \times B_2) \cap D^c] \right\rangle \rightarrow \left\langle N_T(A_1 \times B_1), N_T(A_2 \times B_2) \right\rangle \quad \text{car} \quad \|N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})\| < +\infty \quad \text{et}$$

$$0 \leq \prod_{i=1,2} N_{\Delta t, T}[(A_i \times B_i) \cap D^c] \leq [N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})]^2. \quad \text{Enfin, de façon analo-}$$

$$\text{gue, puisque } 0 \leq N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t \cdot N_{\Delta t, T}[(B \times C) \cap D^c] \leq T \cdot N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$$

$$\text{et } EN_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) < +\infty, \text{ on a } \left\langle N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t, N_{\Delta t, T}[(B \times C) \cap D^c] \right\rangle \rightarrow \left\langle \tau_T(A), N_T(B \times C) \right\rangle.$$

b/ Nous avons, d'après (I-1-5) du chapitre I,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta t}{T} N_{\Delta t, T}(A \times A), \frac{\Delta t}{T} N_{\Delta t, T}(B \times B) \right\rangle &= \frac{(\Delta t)^2}{T^2} N_{\Delta t, T} \int_{A \cap B} \Pi(dx) P_{\Delta t}(x, A \cap B) \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{T^2} \int_A \Pi(dx) \int_A P_{\Delta t}(x, dy) \sum_{k=0}^{N_{\Delta t, T}-2} (N_{\Delta t, T}^{-k-1}) \int_B P_{k\Delta t}(y, dz) P_{\Delta t}(z, B) \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{T^2} \int_B \Pi(dx) \int_B P_{\Delta t}(x, dy) \sum_{k=0}^{N_{\Delta t, T}-2} (N_{\Delta t, T}^{-k-1}) \int_A P_{k\Delta t}(y, dz) P_{\Delta t}(z, A). \end{aligned}$$

Quand $m \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$, $P_{\Delta t}(x, A \cap B) \rightarrow 0$ car $x \in A \cap B$, et $P_{\Delta t}(z, B) \rightarrow 1$ car $z \in B$. D'après a/, nous avons donc

$$(II-1-5 \text{ bis}) \quad \left\langle \frac{1}{T} \tau_T(A), \frac{1}{T} \tau_T(B) \right\rangle = \frac{1}{T^2} \int_A \Pi(dx) \int_0^T dt(T-t) P_t(x, B) \\ + \frac{1}{T^2} \int_B \Pi(dx) \int_0^T dt(T-t) P_t(x, A) .$$

Or $\frac{1}{T^2} \int_0^T dt(T-t) = 1$, d'où (II-1-5) .

Nous faisons des calculs analogues sur

$$\left\langle \frac{1}{T} N_{\Delta t, T}[(A_1 \times B_1) \cap D^c], \frac{1}{T} N_{\Delta t, T}[(A_2 \times B_2) \cap D^c] \right\rangle .$$

Puis, en faisant $\Delta t \rightarrow 0$, nous obtenons

$$(II-1-6 \text{ bis}) \quad \left\langle \frac{1}{T} N_T(A_1 \times B_1), \frac{1}{T} N_T(A_2 \times B_2) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{A_1 \cap A_2} \Pi(dx) Q(x, B_1 \cap B_2) \\ + \frac{1}{T^2} \int_{A_1} \Pi(dx) \int_{B_1} Q(x, dy) \int_0^T dt(T-t) \int_{A_2} P_t(y, du) Q(u, B_2) + \\ + \frac{1}{T^2} \int_{A_2} \Pi(dx) \int_{B_2} Q(x, dy) \int_0^T dt(T-t) \int_{A_1} P_t(y, du) Q(u, B_1) .$$

Comme $\int_{A_1} \Pi(dx) Q(x, B_1) \cdot \int_{A_2} \Pi(dx) Q(x, B_2) =$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{A_1} \Pi(dx) \int_{B_1} Q(x, dy) \int_0^T dt(T-t) \int_{A_2} \Pi(du) Q(u, B_2) + \\ + \frac{1}{T^2} \int_{A_2} \Pi(dx) \int_{B_2} Q(x, dy) \int_0^T dt(T-t) \int_{A_1} \Pi(du) Q(u, B_1) .$$

D'où (II-1-6). Dans le cas particulier où $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$, nous retrouvons (II-1-4).

Il reste à calculer $\left\langle \frac{1}{T} \tau_T(A), \frac{1}{T} N_T(B \times C) \right\rangle$. Nous le calculons à l'aide de

$$\left\langle \frac{1}{T} N_{\Delta t, T}(A \times A) \Delta t, \frac{1}{T} N_{\Delta t, T}[(B \times C) \cap D^c] \right\rangle .$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$, d'après a/, nous obtenons

$$(II-1-7 \text{ bis}) \quad \left\langle \frac{1}{T} \tau_T(A), \frac{1}{T} N_T(B \times C) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_A \Pi(dx) \int_0^T dt(T-t) \int_B P_t(x, du) Q(u, C) \\ + \frac{1}{T^2} \int_B \Pi(dx) \int_C Q(x, dy) \int_0^T dt(T-t) P_t(y, A) .$$

D'où (II-1-7) .

1.3. ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Dans ce qui suit, supposons que Π et P_t , $\forall t \in R_+$, dépendent d'un paramètre $\theta \in \Theta$, où Θ est un intervalle compact de R , non réduit à un point et contenant θ_0 , valeur vraie de θ . Nous nous proposons d'estimer θ_0 par la méthode du maximum de vraisemblance. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées, conditions groupées dans l'hypothèse

(H₃²) : 1°/ $\exists$ un $\theta_1 \in \Theta$, tel que $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, \{x\}; \theta_1) = 1$, uniformément en x .

2°/ $\frac{\partial}{\partial \theta} P_t(x, A; \theta)$ existe et est continue en θ , $\forall t \in R_+$, $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$.

3°/ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \theta} P_t(x, A; \theta)$ existe uniformément en θ , $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$.

4°/ $\forall \theta \in \Theta$, $\exists$ une mesure $\mu > 0$ indépendante de θ , mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ telle que $\forall x \in \mathcal{X}$, et $\forall t \in R_+$, $P_t(x, \cdot; \theta)$ soit absolument continue par rapport à μ sur $\mathcal{X} - \{x\}$. (A suivre).

PROPOSITION II-1-4. Sous (H₃²) (1°/ à 4°/), $\forall \theta \in \Theta$, $x \in \mathcal{X}$ et $A \in \mathcal{B}$,

(i) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I_A(x) - P_t(x, A; \theta)] = I_A(x) Q(x; \theta) - Q(x, A; \theta)$, uniformément en θ , avec

$$Q(x, A; \theta) = \int_A q(x, y; \theta) d\mu(y) \leq Q(x; \theta) \leq M(\theta) < +\infty .$$

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \theta} P_t(x, A; \theta) = -I_A(x) \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x, A; \theta)$.

Démonstration.

Posons $G_t(x, A; \theta) = \frac{1}{t} [I_A(x) - P_t(x, A; \theta)]$, nous aurons

$$\forall x \in \mathcal{X} ,$$

$$a/ \quad G_t(x, A; \theta_1) \rightarrow G_0(x, A; \theta_1) = I_A(x) Q(x, \theta_1) - Q(x, A; \theta_1) ,$$

$$b/ \quad \frac{\partial}{\partial \theta} G_t(x, A; \theta) \text{ existe et est continue en } \theta .$$

$$c/ \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \theta} G_t(x, A; \theta) = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \theta} P_t(x, A; \theta) \text{ existe uniformément en } \theta .$$

D'après le théorème III p.144 de [26], nous avons $\forall \theta \in \Theta$,

$$(i) \quad G_t(x, A; \theta) \rightarrow G_0(x, A; \theta) = I_A(x) Q(x; \theta) - Q(x, A; \theta)$$

$$(ii) \quad G_0(x, A; \theta) \text{ est dérivable sur } \Theta \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \theta} G_t(x, A; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} G_0(x, A; \theta) \\ &= I_A(x) \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x, A; \theta) . \end{aligned}$$

Quant à $Q(x, A; \theta) = \int_A q(x, y; \theta) d\mu(y)$ dans (i), c'est l'application d'un résultat donné dans [22], théorème 5-5, où notre $\mathcal{X}$ n'est autre que $R \in \mathcal{R}_u$ dans [22].

Convention: $\forall x \in \mathcal{X}$, $q(x, y)$ n'est défini que p.p. (mesure μ); nous savons qu'on peut choisir une version qui est $\mathcal{B}^2$ -mesurable et c'est ce que nous faisons, avec en plus, $q(x, x) = 0$.

(H₃²) (suite):

5°/ La condition (D) de Doeblin est vérifiée, et $\forall \theta \in \Theta$ et $\forall A \in \mathcal{B}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(x, A; \theta) = \Pi(A; \theta)$ existe et est indépendante de x .

Or dans ce cas, 4° et 5° $\Rightarrow \Pi(\cdot; \theta) \ll \mu$. Nous avons donc $\Pi(A; \theta) = \int_A \tilde{\Pi}(x; \theta) d\mu(x)$.

6°/ $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} Q$, $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \tilde{\Pi}$ et $\frac{\partial^v}{\partial \theta^v} q$ existent pour $v = 1, 2, 3$ et sont bornées. Et supposons de plus que si nous posons

$$\beta_v(x) = \sup_{\theta \in \Theta} \text{ess} \left| \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \tilde{\Pi}(x; \theta) \right| \quad \text{et} \quad \gamma_v(x, y) = \sup_{\theta \in \Theta} \text{ess} \left| \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} q(x, y; \theta) \right|$$

alors, β_v et γ_v sont intégrables- μ , le dernier $\forall x \in \mathcal{X}$.

PROPOSITION II-1-5. Sous (H_3^2) , l'équation de vraisemblance s'écrit

$$(II-1-8) \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} L_T(\theta; \omega) = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} \tilde{\pi}[X_0(\omega); \theta] \\ - \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta) d\tau_T(x; \omega) + \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} q(x, y; \theta) dN_T(x, y; \omega) = 0.$$

Démonstration.

Pour Δt petit, d'après la proposition II-1-4,

$$P_{\Delta t}(x, dy; \theta) \simeq I_{dy}(x) [1 - Q(x; \theta) \Delta t] + q(x, y; \theta) d\mu(y) \Delta t.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} P_{\Delta t}(x, dy; \theta) \simeq \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta) \Delta t + \frac{\partial}{\partial \theta} q(x, x; \theta) d\mu(x) \Delta t, & \text{si } x=y \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} q(x, y; \theta), & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Si on attribue à $\tau_T(\{x\}; \omega)$ la valeur 0 lorsque $x \notin$ la trajectoire correspondante à ω , à $N_T(\{x\} \times \{y\}; \omega)$ la valeur 0 lorsque la trajectoire correspondante à ω ne marque aucun saut de $\{x\}$ à $\{y\}$ alors la proposition II-1-4 et les remarques ci-dessus nous permettent d'obtenir (II-1-8).

Etude des intégrales $\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x; \omega)$ et $\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} h(x, y; \theta) dN_T(x, y; \omega)$

où f et h sont respectivement des fonctions $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^2$ -mesurables, $\forall \theta \in \Theta$.

D'abord un résultat préliminaire.

LEMME 1. Soit $\rho(., \omega)$ une mesure > 0 sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ dépendant de $\omega \in \Omega$, telle que $\forall A \in \mathcal{B}$, $\rho(A; .)$ est une v.a. à valeurs positives, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$. Alors

(i) $E\rho(.) = \int_{\Omega} \rho(., \omega) d\text{Pr}(\omega)$ est une mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

(ii) si g est une fonction réelle $E\rho$ -intégrable, alors

$$\int_{\mathcal{X}} g(x) d\rho(x; .) \text{ est une v.a. qui est } < +\infty \text{ pour tout } \omega \notin \Omega_0 \\ \text{où } \text{Pr}(\Omega_0) = 0, \text{ et } E \int_{\mathcal{X}} g(x) d\rho(x) = \int_{\mathcal{X}} g(x) E d\rho(x).$$

Démonstration.

(i) Soit une suite $A_n \in \mathcal{B}$ telle que $A_n \uparrow A \in \mathcal{B}$. Puisque ρ est une mesure, $\rho(A_n; \omega) \uparrow \rho(A; \omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. D'où d'après [24] p.124, $E\rho(A_n) \uparrow E\rho(A)$. De plus, $E\rho$ est une fonction d'ensembles additive: si $A \cap B = \emptyset$, $E\rho(A \cup B) = E\rho(A) + E\rho(B)$. D'où $E\rho$ est bien une mesure (cf. [24] p.84).

(ii) Le fait que $\int_{\mathcal{X}} g(x) d\rho(x; \cdot)$ est une v.a. est évident.

Or $\int_{\mathcal{X}} g^+(x) d\rho(x, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_i^+ \rho(A_i; \omega)$. D'où

$$\begin{aligned} E \int_{\mathcal{X}} g^+(x) d\rho(x) &= \int_{\Omega} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_i^+ \rho(A_i; \omega) \right] dPr(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_i^+ \int_{\Omega} \rho(A_i; \omega) dPr(\omega) = \int_{\mathcal{X}} g^+(x) E d\rho(x). \end{aligned}$$

g est $E\rho$ -intégrable $\Rightarrow E \int_{\mathcal{X}} g^+(x) d\rho(x) < +\infty \Rightarrow$

$\int_{\mathcal{X}} g^+(x) d\rho(x; \omega) < +\infty$ pour tout $\omega \notin \Omega_1$ avec $Pr(\Omega_1) = 0$. De même pour g^- avec Ω_2 telle que $Pr(\Omega_2) = 0$. D'où $\int_{\mathcal{X}} g(x) d\rho(x; \omega) < \infty$ pour tout $\omega \notin \Omega_0$ avec $Pr(\Omega_0) = 0$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

PROPOSITION II-1-6. Soit f une application de $\mathcal{X} \times \Theta$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$\forall \theta \in \Theta$, $f(\cdot; \theta)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée par $K(\theta) < +\infty$.

Alors, sous (H_3^2) , quand $T \rightarrow +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x) - \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\pi(x; \theta_0) \right\| \rightarrow 0.$$

Démonstration.

Il découle immédiatement du lemme, que

$$E \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x) = \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\pi(x; \theta_0).$$

D'autre part,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x) \right\|^2 = E \frac{1}{T^2} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) f(y; \theta) d\tau_T(x) d\tau_T(y).$$

Or $E(\tau_T \times \tau_T)$ est une mesure finie sur $(\mathcal{X}^2, \mathcal{B}^2)$, le lemme 1 s'applique et nous pouvons écrire, d'après (II-1-5 bis),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x) \right\|^2 &= \frac{1}{T^2} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) f(y; \theta) \langle d\tau_T(x), d\tau_T(y) \rangle \\ &= \frac{2}{T^2} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} d\pi(x; \theta_0) f(x; \theta) f(y; \theta) \int_0^T dt (T-t) P_t(x, dy; \theta_0) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad & \left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\tau_T(x) - \int_{\mathcal{X}} f(x; \theta) d\pi(x; \theta_0) \right\|^2 = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_{\mathcal{X}} d\pi(x; \theta_0) f(x; \theta) \int_{\mathcal{X}} f(y; \theta) \int_0^T dt (T-t) [P_t(x, dy; \theta_0) - \pi(dy; \theta_0)] \\ &\leq \frac{2}{T^2} K(\theta)^2 \gamma \int_0^T dt (T-t) \rho^t \rightarrow 0, \text{ quand } T \rightarrow +\infty . \end{aligned}$$

PROPOSITION II-1-7. Soit h une application de $\mathcal{X}^2 \times \Theta$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall \theta \in \Theta$, $h(\cdot; \theta) \leq H(\theta) < +\infty$, que $h(\cdot; \theta)$ est $\mathcal{B}^2$ -mesurable et que $h(x, x; \theta) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Alors, sous (H_3^2) , quand $T \rightarrow +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} h(x, y; \theta) dN_T(x, y) - \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} h(x, y; \theta) \pi(dx; \theta_0) Q(x, dy; \theta_0) \right\| \rightarrow 0 .$$

Démonstration.

D'après le lemme 1 et (II-1-6 bis), nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} h(x, y; \theta) dN_T(x, y) \right\|^2 &= \\ \frac{2}{T^2} \int_{\mathcal{X}^2} \pi(dx; \theta_0) Q(x, dy; \theta_0) h(x, y; \theta) \int_{\mathcal{X}^2} h(u, v; \theta) \int_0^T dt (T-t) P_t(y, du; \theta_0) \\ &\quad Q(u, dv; \theta_0) . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} h(x, y; \theta) dN_T(x, y) - \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} h(x, y; \theta) \pi(dx; \theta_0) Q(x, dy; \theta_0) \right\| \\ &= \frac{2}{T^2} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta_0) Q(x, dy; \theta_0) h(x, y; \theta) \times \\ &\quad \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} h(u, v; \theta) \int_0^T dt (T-t) [P_t(y, du; \theta_0) - \pi(du; \theta_0)] Q(u, dv; \theta_0) . \\ &\leq \frac{2}{T^2} H(\theta)^2 M(\theta_0) \gamma \int_0^T dt (T-t) \rho^t \rightarrow 0 \text{ quand } T \rightarrow +\infty . \end{aligned}$$

Il importe, pour nous, d'étudier d'abord le comportement asymptotique des expressions $\frac{1}{T} \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} L_T(\theta; \omega)$, $v = 1, 2, 3$.

LEMME 2. Sous (H_3^2) , quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(i) \quad \left\| \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} L_T(\theta_0) \right\| \rightarrow 0,$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{1}{T} \frac{d^2}{d\theta^2} L_T(\theta_0) - B(\theta_0) \right\| \rightarrow 0, \text{ où}$$

$$B(\theta_0) = - \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{q(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \right]^2 d\mu(y) < 0.$$

$$(iii) \quad \left\| \frac{1}{T} \frac{d^3}{d\theta^3} L_T(\theta) - c(\theta) \right\| \rightarrow 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \text{ avec}$$

$$c(\theta) = - \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} Q(x; \theta) \pi(dx; \theta_0) + \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} Q(x, dy; \theta_0) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log} q(x, y; \theta)$$

Démonstration. Elle repose sur les propositions II-1-6 et II-1-7, avec

$$f(x; \theta) = \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} Q(x; \theta) \text{ et } h(x, y; \theta) = \frac{\partial^v}{\partial \theta^v} \text{Log} q(x, y; \theta)$$

respectivement $v = 1, 2, 3$.

(i) Prenons ici $v = 1$,

$$(a) \quad \frac{1}{T} E \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} \tilde{\pi}[X_0(\omega); \theta_0] = \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} \tilde{\pi}(x; \theta_0) \pi(dx; \theta_0) = 0.$$

$$(b) \quad - \frac{1}{T} E \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) d\tau_T(x) = - \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) \pi(dx; \theta_0).$$

$$(c) \quad \frac{1}{T} E \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} q(x, y; \theta_0) dN_T(x, y) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) \pi(dx; \theta_0).$$

L'addition de (a), (b), (c) $\Rightarrow E \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta_0) = 0$. Les propositions II-1-6 et 7 donnent le résultat énoncé.

(ii) Ici $v = 2$.

Des calculs faciles montrent que

$$\frac{1}{T} E \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_T(\theta_0) =$$

$$= -\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{\tilde{\pi}(x; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\pi}(x; \theta_0) \right]^2 d\mu(x) \\ - \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{q(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \right]^2 d\mu(y) < 0.$$

Posons $B(\theta_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_T(\theta_0)$. Il suffit alors d'appliquer les propositions II-1-6 et II-1-7.

(iii) Ici $v = 3$.

Comme $\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } \tilde{\pi}[X_0(\omega); \theta] \pi(dx; \theta_0) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$,

$$\text{nous avons } C(\theta) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} L_T(\theta) = \\ = - \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} Q(x; \theta) \pi(dx; \theta_0) + \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} Q(x, dy; \theta_0) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \text{Log } q(x, y; \theta)$$

Il reste à appliquer les propositions II-1-6 et 7.

LEMME 3. Quand $T \rightarrow +\infty$, toujours sous (H_3^2) ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta_0) \right\|^2 = - \lim_{T \rightarrow +\infty} E \frac{1}{T} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_T(\theta_0).$$

Démonstration.

Pour simplifier, notons respectivement les premier, second et troisième termes du second membre de l'équation (II-1-8) par $\alpha_T(\theta; \omega)$, $\beta_T(\theta; \omega)$ et $\gamma_T(\theta; \omega)$. Nous avons donc

$$(II-1-9) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta_0; \omega) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_T(\theta_0) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0) \right\|^2 \\ + \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_T(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0) \right\rangle \\ - 2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\rangle + 2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_T(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\rangle.$$

Examinons d'abord les premier, quatrième et sixième termes: quand $T \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{T} \left\| \alpha_T(\theta_0) \right\|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{T} |\langle \alpha_T(\theta_0), \beta_T(\theta_0) \rangle| \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_T(\theta_0) \right\| \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0) \right\| \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{T} |\langle \alpha_T(\theta_0), \gamma_T(\theta_0) \rangle| \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_T(\theta_0) \right\| \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\| \rightarrow 0.$$

Calculons maintenant les trois termes qui restent:

(a) Le deuxième terme, $\left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0) \right\|^2 =$

$$= \frac{2}{T} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} Q(y; \theta_0) \Pi(dx; \theta_0) \int_0^T dt (T-t) P_t(x, dy; \theta_0).$$

(b) Le cinquième terme, $-2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{T}} \beta_T(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\rangle$

$$= -\frac{2}{T} \int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} Q(y; \theta_0) \Pi(dx; \theta_0) \int_0^T dt (T-t) P_t(x, dy; \theta_0)$$

$$- \frac{2}{T} \int_{\mathcal{X}^3} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(x; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \Pi(dy; \theta_0) d\mu(z) \int_0^T dt (T-t) P_t(z, dx; \theta_0),$$

car $\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} q(y, z; \theta_0) d\mu(z) = \frac{\partial}{\partial \theta} Q(y; \theta_0).$

(c) Le troisième terme, $\left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \gamma_T(\theta_0) \right\|^2 =$

$$= \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{q(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \right]^2 d\mu(y) +$$

$$+ \frac{2}{T} \int_{\mathcal{X}^3} \frac{\partial}{\partial \theta} Q(u; \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \Pi(dx; \theta_0) d\mu(y) \int_0^T dt (T-t) P_t(y, du; \theta_0).$$

L'addition des résultats donnés par (a), (b) et (c) conduit bien

à $\int_{\mathcal{X}} \Pi(dx; \theta_0) \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{q(x, y; \theta_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} q(x, y; \theta_0) \right]^2 d\mu(y).$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant

PROPOSITION II-1-8. Sous (H_3^2) ,

(i) L'équation de vraisemblance (II-1-8), équation en θ , possède une racine simple $\theta_T^*(\omega)$ pour $T \geq T_0(\omega)$ où T_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $T \rightarrow +\infty$, l'estimateur θ_T^* converge en probabilité vers θ_0 , valeur vraie de θ .

(ii) L'estimateur θ_T^* est faiblement efficace au sens large.

Démonstration.

(i) Cette première partie se démontre en se servant des résultats du lemme 2. Nous ne reproduisons pas ici les raisonnements qui sont d'ailleurs à peu près les mêmes que pour le cas des processus discrets.

(ii) L'efficacité asymptotique au sens large se déduit du lemme 3. En effet, prenons

$$Z_T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta) \cdot \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta_0) \right\| \right)^{-1},$$

le reste de la démonstration se fait simplement.

Remarque. Il peut arriver que toutes les conditions de (H_3^2) ne sont pas remplies : si Θ est un ouvert de R , ou si l'ensemble des conditions 1^o, 2^o et 3^o de (H_3^2) est remplacé par d'autres conditions plus faibles, mais qui assurent un sens à l'expression (II-1-8), alors par extension, nous dirons encore que (II-1-8) est l'équation de vraisemblance.

1.4. ESTIMATION PAR LA METHODE DU Ψ^2 MINIMUM.

Dans ce qui suit, Θ sera un ouvert de R . Comme pour le cas des processus discrets, soit E un ensemble fini d'indices, $E = \{1, \dots, r\}$ et soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Sous des conditions que nous préciserons, la méthode consiste à choisir θ tel que

$$(II-1-10) \quad \Psi_T^2(\theta; \omega) = \sum_{i \in E} \frac{[\tau_T(A_i; \omega) - T \pi(A_i; \theta)]^2}{T \pi(A_i; \theta)} +$$

$$+ \sum_{i,j \in E} \frac{\left[N_T(A_i \times A_j; \omega) - T \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta) \right]^2}{T \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta)}$$

soit minimum.

Ce choix de θ est motivé par la proposition II-1-2, selon laquelle, quand $T \rightarrow +\infty$,

$$\left\| \frac{1}{T} \tau_T(A) - \Pi(A; \theta_0) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$\left\| \frac{1}{T} N_T(A \times B) - \int_A \Pi(dx; \theta_0) Q(x, B; \theta_0) \right\| \rightarrow 0.$$

Ce qui nous conduit à résoudre l'équation

$$(II-1-11) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \Psi_T^2 = 0.$$

En négligeant les termes du second ordre, nous avons l'équation modifiée

$$(II-1-12) \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta; \omega) = \sum_{i \in E} \frac{\tau_T(A_i; \omega) - T \Pi(A_i; \theta)}{T \Pi(A_i; \theta)} \frac{d}{d\theta} \Pi(A_i; \theta) +$$

$$+ \sum_{i,j \in E} \left[N_T(A_i \times A_j; \omega) - T \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta) \right] \frac{d}{d\theta} \log \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta)$$

$$= 0.$$

Le minimum de Ψ^2 , ou plutôt le minimum asymptotique de cette expression est effectivement obtenue, car nous allons voir dans la démonstration de la proposition II-1-9 ci-dessous que

$$-E \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta) \text{ est } > 0.$$

Faisons l'hypothèse suivante

$$(H_3^3): \quad 1^\circ / (H_3^1) \text{ est satisfaite } \forall \theta \in \Theta,$$

$$2^\circ / \exists \text{ une partition mesurable } \{A_i\}_{i \in E} \text{ de } (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \text{ telle que}$$

$$\forall i, j \in E, \quad \Pi(A_i; \theta) > 0 \quad \text{et} \quad \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta) > 0.$$

$$3^\circ / \quad \frac{d^v}{d\theta^v} \Pi(A_i; \theta) \quad \text{et} \quad \frac{d^v}{d\theta^v} \int_{A_i} \Pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta) \quad \text{existent et}$$

sont bornés pour $v = 1, 2, 3$, $\forall i, j \in E$.

L'équation (II-1-12) se réduit alors à

$$(II-1-13) \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta; \omega) = \frac{1}{T} \sum_{i \in E} \tau_T(A_i; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log } \pi(A_i; \theta) + \\ - \frac{d}{d\theta} \int_{\mathcal{X}} \pi(dx; \theta) Q(x; \theta) + \frac{1}{T} \sum_{i, j \in E} N_T(A_i \times A_j; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i} \pi(dx; \theta) Q(x, A_j; \theta) \\ = 0 .$$

Elle est bien différente de l'équation de vraisemblance.

PROPOSITION II-1-9. Sous (H_3^3) , l'équation (II-1-13), équation en θ , possède une racine simple $\theta_T^*(\omega)$ pour $T \geq T_0(\omega)$ où T_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $T \rightarrow +\infty$, $\theta_T^* \rightarrow \theta_0$ en probabilité

Démonstration.

Il suffit de démontrer l'analogie du lemme 2, avec $\frac{d}{d\theta} Y_T(\theta)$ au lieu de $\frac{d}{d\theta} L_T(\theta)$.

On voit facilement que $E \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta_0) = 0$,

$$E \frac{1}{T} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_T(\theta_0) = - \sum_{i \in E} \frac{1}{\pi(A_i; \theta_0)} \left[\frac{d}{d\theta} \pi(A_i; \theta_0) \right]^2 \\ - \sum_{i, j \in E} \frac{1}{\int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) Q(x, A_j; \theta_0)} \left[\frac{d}{d\theta} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) Q(x, A_j; \theta_0) \right]^2 < 0 .$$

Puis, d'après (II-1-12) et d'après la proposition II-1-2 ,

$$\left\| \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta_0) \right\| \leq \sum_{i \in E} \left| \frac{d}{d\theta} \text{Log } \pi(A_i; \theta_0) \right| \cdot \left\| \frac{1}{T} \tau_T(A_i) - \pi(A_i; \theta_0) \right\| + \\ + \sum_{i, j \in E} \left| \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) Q(x, A_j; \theta_0) \right| \times \\ \times \left\| \frac{1}{T} N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \pi(dx; \theta_0) Q(x, A_j; \theta_0) \right\| \rightarrow 0 ,$$

quand $T \rightarrow +\infty$, car E est fini.

De façon analogue,

$$\left\| \frac{1}{T} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_T(\theta_0) - E \frac{1}{T} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_T(\theta_0) \right\| \rightarrow 0 ,$$

avec $E \frac{1}{T} \frac{d^2}{d\theta^2} Y_T(\theta_0) < 0 ;$

et $\left\| \frac{1}{T} \frac{d^3}{d\theta^3} Y_T(\theta) - E \frac{1}{T} \frac{d^3}{d\theta^3} Y_T(\theta) \right\| \rightarrow 0 , \quad \forall \theta \in \Theta .$

Il reste alors à appliquer le même raisonnement utilisé pour la méthode du maximum de vraisemblance pour obtenir l'existence d'une racine de (II-1-13) et sa convergence.

1.5. REMARQUE CONCERNANT LA METHODE DU χ^2 MINIMUM.

Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition finie, $\mathcal{B}$ -mesurable, de $\mathcal{X}$.

L'expression généralisée du χ^2 , dans notre cas actuel, semble être la suivante

$$(II-1-14) \quad \chi_T^2(\theta; \omega) = \sum_{i, j \in E} \frac{\left[N_T(A_i \times A_j; \omega) - \int_{A_i} Q(x, A_j; \theta) d\tau_T(x; \omega) \right]^2}{\int_{A_i} Q(x, A_j; \theta) d\tau_T(x; \omega)}$$

L'équation modifiée du χ^2 minimum sera

$$(II-1-15) \quad \frac{1}{T} \sum_{i, j \in E} N_T(A_i \times A_j; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} \int_{A_i} Q(x, A_j; \theta) d\tau_T(x; \omega) - \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} \int_{\mathcal{X}} Q(x; \theta) d\tau_T(x; \omega) = 0 .$$

Comme pour le cas discret, la méthode ne semble donner de résultats que dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini (cf. §2). Nous voulons dire par là que nous n'avons pas su démontrer ici l'existence d'une racine convergente de l'équation (II-1-15).

Remarquons enfin que , d'après calculs ,

$$\begin{aligned}
 \text{(II-1-16)} \quad & \left\langle N_T(A_i \times A_j) - \int_{A_i} Q(x, A_j) d\tau_T(x), N_T(A_k \times A_\ell) - \int_{A_k} Q(x, A_\ell) d\tau_T(x) \right\rangle \\
 &= T \int_{A_i \cap A_k} \Pi(dx) Q(x, A_j \cap A_\ell) .
 \end{aligned}$$

1.7. SUR LES ESTIMATEURS LINEAIRES.

Comme dans le cas discret, nous savons que sous des conditions appropriées, y compris la condition de mesurabilité du processus,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f \circ X_t dt \longrightarrow E(f \circ X_0) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \Pi(dx; \theta_0) \quad , \quad \text{p.s.}$$

Par définition, on appelle estimateur linéaire toute solution $\theta_T^*(\omega)$ de l'équation

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f \circ X_t](\omega) dt = \int_{\mathcal{X}} f(x) \Pi(dx; \theta) .$$

Par exemple, si on prend $f = I_A$, $A \in \mathcal{B}$, alors on aura à résoudre

$$\frac{1}{T} \tau_T(A; \omega) = \Pi(A; \theta) .$$

Evidemment, une telle procédure peut conduire à une trop grande perte d'information: en particulier, si $A = \mathcal{X}$, on n'obtiendra rien.

§2. CAS OU $\mathcal{X}$ EST FINI.

Nous allons appliquer ici les résultats déjà obtenus dans le cas général, et essayer d'en trouver d'autres, propres à ce cas particulier.

Soit donc un processus permanent homogène $\{P_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ dont l'espace des états $\mathcal{X}$ ne comporte qu'un nombre fini de points notés $1, 2, \dots, r$.

La condition de continuité (C) s'écrit ici:

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_t(i, j) = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in \mathcal{X} .$$

Et sous (C), $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\delta_{ij} - p_t(i, j)] = \delta_{ij} q_i - [1 - \delta_{ij}] q_{ij}$,
 $q_{ij} \leq q_i < +\infty$ et $\sum_j q_{ij} = q_i$, avec la convention $q_{ii} = 0$.

2.1. ETUDE DES $N_T(ij)$ et $\tau_T(i)$.

Les hypothèses à imposer ici sont évidemment plus simples. L'hypothèse (H_3^1) se simplifie et devient

(H_4^1) : a/ (C) est vérifiée,
 b/ $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_t(i, j) = \pi_j$, indépendant de i .

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire strictement stationnaire du processus ayant les π_j pour probabilités absolues. Notons par $\tau_T(i; \omega)$ et $N_T(ij; \omega)$ respectivement la durée de séjour dans l'état i , et le nombre de fois que X_t passe de i à j , pour la trajectoire correspondante à $\omega \in \Omega$ et à l'intervalle de temps $t=0, t=T$. Par convention, posons $N_T(ii) = 0$.

Signalons l'importance des $\tau_T(i)$ et $N_T(ij)$, en rappelant le résultat suivant, établi dans [15] :

L'ensemble de x_0 , des $\tau_T(i)$ et des $N_T(ij)$, (ces r^2+1 éléments, non indépendants, sont liés par des relations évidentes est un résumé exhaustif par rapport à l'ensemble de Q et des π_i ;

autrement dit, la loi de probabilité de l'évolution de X_t pour la période $[0, T]$, conditionnelle quand x_0 , les $\tau_T(i)$ et les $N_T(ij)$ ont des valeurs déterminées, est indépendante de Q et des Π_i . (*)

L'étude de la convergence de $\frac{1}{T} \tau_T(i)$ et $\frac{1}{T} N_T(ij)$ nous conduit, dans le cas actuel, à un résultat un peu plus fort que celui du §1.

PROPOSITION II-2-1. Sous (H_4^1) , quand $T \rightarrow +\infty$, et $\forall i, j \in \mathcal{X}$,

- (i) $\frac{1}{T} \tau_T(i) - \Pi_i \rightarrow 0$ p.s. et en m.q.
 (ii) $\frac{1}{T} N_T(ij) - \Pi_i q_{ij} \rightarrow 0$ p.s. et en m.q.

Démonstration.

(i) n'est que la traduction de la proposition II-1-2 dans notre cas, les formules (II-1-1) et (II-1-2) s'écrivent ici

$$(II-2-1) \quad E \tau_T(i) = T \Pi_i,$$

$$(II-2-2) \quad \left\| \frac{1}{T} \tau_T(i) - \Pi_i \right\|^2 = \frac{2}{T^2} \Pi_i \int_0^T dt (T-t) [p_t(i, i) - \Pi_i] = o\left(\frac{1}{T}\right)$$

(ii) La convergence en m.q. est donnée par la proposition II-1-2. Les formules (II-1-3) et (II-1-4) deviennent ici

$$(II-2-3) \quad E N_T(ij) = T \Pi_i q_{ij}.$$

$$(II-2-4) \quad \left\| \frac{1}{T} N_T(ij) - \Pi_i q_{ij} \right\|^2 = \frac{1}{T} \Pi_i q_{ij} + \\ + \frac{2}{T} \Pi_i q_{ij} \int_0^T dt \left(1 - \frac{t}{T}\right) [p_t(j, i) - \Pi_i] q_{ij}.$$

Quant à la convergence p.s. de $\frac{1}{T} N_T(ij)$, elle est plus longue à démontrer. Rappelons que la condition $b/ \iff \exists$ une seule classe

(*) L'auteur de ce résultat m'a fait remarquer qu'à son avis, il doit y avoir des généralisations à d'autres cas que celui où l'espace des états est fini.

ergodique. Distinguons deux cas:

a/ Si i n'appartient pas à la classe ergodique, $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ne prend qu'un nombre fini de fois l'état i . Par conséquent, $N_T(ij) < +\infty$ p.s. et $\frac{1}{T} N_T(ij) \rightarrow 0$ p.s. quand $T \rightarrow +\infty$. Or dans ce cas, $\Pi_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_t(k, i) = 0$, donc on a bien

$$\frac{1}{T} N_T(ij) \rightarrow \Pi_i q_{ij}.$$

b/ Si i appartient à la classe ergodique, notons par $\alpha_k(ij; \omega)$ le k -ième temps d'atteinte de j , partant de l'état i , dans l'intervalle $[0, +\infty)$. Lorsque $j = i$, $\alpha_k(ii; \omega)$ est le k -ième temps de retour. Soit x_0 l'état que prend $X_t(\omega)$ à l'instant 0. Soit $K_T(i)$ une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que

$$\alpha_1(x_0 i; \omega) + \sum_{k=1}^{K_T(i; \omega)} \alpha_k(ii; \omega) \leq T < \alpha_1(x_0 i; \omega) + \sum_{k=1}^{K_T(i; \omega)+1} \alpha_k(ii; \omega)$$

Puisque $\exists$ une seule classe ergodique, $\alpha_1(x_0 i) < +\infty$ et $\alpha_k(ii) < +\infty$, p.s. D'où, quand $T \rightarrow +\infty$, $K_T(i) \rightarrow +\infty$ p.s.

Soit maintenant $\{\hat{X}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et dont l'espace des états est $\mathcal{X}^2$, définie de la façon suivante: $\hat{X}_t(\omega) = (i, j)$ si $X_t(\omega) = j$ et $X_{t-0}(\omega) = i$ avec la convention que $\hat{X}_0(\omega) = (x_0, x_0)$ si $X_0(\omega) = x_0$.

Notons par $I_{ij}(\cdot)$ l'indicateur de (i, j) . Considérons la f.a. liée à X_t définie par $I_{ij} \circ \hat{X}_t$. Posons $\sigma_k(ij) = I_{ij} \circ \hat{X}_{t_k}$, t_k désignant le k -ième instant (aléatoire) où $\hat{X}_t(\omega) = (i, u) \in \mathbb{D}$ (autrement dit, la k -ième fois que $X_t(\omega)$ passe de i à un état différent de i). Nous avons

$$N_T(ij; \omega) = \sum_{k=1}^{K_T(i; \omega)+1} \sigma_k(ij; \omega).$$

Comme $\sigma_k(ij)$ et $\sigma_m(ij)$, pour $k \neq m$, sont des v.a. indépendantes, quand $T \rightarrow +\infty$, (nous avons vu que dans ce cas, $K_T(i) \rightarrow +\infty$ p.s.)

$$\frac{1}{K_T(i)+1} \sum_{k=1}^{K_T(i)+1} \sigma_\ell(ij) \rightarrow E\sigma_1(ij) = \frac{1}{q_i} q_{ij} \quad , \text{ p.s.}$$

Mais les v.a. $\alpha_k(ii)$ et $\alpha_m(ii)$, pour $k \neq m$, sont aussi indépendantes, d'où

$$\frac{1}{K_T(i)+1} \sum_{k=1}^{K_T(i)+1} \alpha_k(ii) \rightarrow E\alpha_1(ii) \quad \text{p.s.}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{K_T(i;\omega)} \alpha_k(ii;\omega) \leq T - \alpha_1(x_{0i};\omega) < \sum_{k=1}^{K_T(i;\omega)+1} \alpha_k(ii;\omega)$$

avec $\alpha_1(x_{0i}) < +\infty$ p.s. ; nous avons, quand $T \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{K_T(i)+1} \alpha_k(ii) \rightarrow 1 \quad \text{p.s.}$$

D'où

$$\frac{T}{K_T(i)+1} \rightarrow E\alpha_1(ii) \quad \text{p.s.}$$

Finalement,

$$\frac{1}{T} N_T(ij) \rightarrow \frac{E\sigma_1(ij)}{E\sigma_1(ii)} = \frac{q_{ij}}{q_i E\alpha_1(ii)} \quad , \text{ p.s.}$$

Or, nous avons vu que $\frac{1}{T} N_T(ij) \rightarrow \pi_i q_{ij}$ en probabilité.
Nous avons donc $\frac{1}{T} N_T(ij) \rightarrow \pi_i q_{ij}$, p.s.

PROPOSITION II-2-2. Sous (H_4^1) , $\forall i, j, k, \ell \in \mathcal{X}$, quand $T \rightarrow +\infty$,

- (i) $\left\langle \frac{1}{T} \tau_T(i), \frac{1}{T} \tau_T(j) \right\rangle \rightarrow \pi_i \pi_j$,
- (ii) $\left\langle \frac{1}{T} N_T(ij), \frac{1}{T} N_T(k\ell) \right\rangle \rightarrow \pi_i q_{ij} \cdot \pi_k q_{k\ell}$,
- (iii) $\left\langle \frac{1}{T} \tau_T(i), \frac{1}{T} N_T(jk) \right\rangle \rightarrow \pi_i \cdot \pi_j q_{jk}$.

Ces résultats ont été énoncés dans la proposition II-1-3. Nous avons plus précisément:

$$(II-2-5) \quad \left\langle \frac{1}{T} \tau_T(i), \frac{1}{T} \tau_T(j) \right\rangle = \frac{1}{T} \pi_i \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(i, j) + \\ + \frac{1}{T} \pi_j \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(j, i) .$$

$$(II-2-6) \quad \left\langle \frac{1}{T} N_T(ij), \frac{1}{T} N_T(k\ell) \right\rangle = \frac{1}{T} \delta_{ik} \delta_{j\ell} \pi_i q_{ij} + \\ + \frac{1}{T} \pi_i q_{ij} \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(j, k) q_{k\ell} + \frac{1}{T} \pi_k q_{k\ell} \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(\ell, i) q_{ij} .$$

$$(II-2-7) \quad \left\langle \frac{1}{T} \tau_T(i), \frac{1}{T} N_T(jk) \right\rangle = \frac{1}{T} \pi_i \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(i, j) q_{jk} + \\ + \frac{1}{T} \pi_j q_{jk} \int_0^T dt (1 - \frac{t}{T}) p_t(k, i) .$$

2.2. ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Supposons que les éléments de Q (donc ceux de $P_t = \exp.Qt$) et de Π dépendent d'un paramètre $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. L'hypothèse (H_3^2) se simplifie ici et devient

- (H_4^2) : 1°/ $\exists$ un $\theta_1 \in \Theta$, tel que $\lim_{t \rightarrow 0} p_t(i, i; \theta_1) = 1$,
 2°/ $\frac{d}{d\theta} p_t(i, j; \theta)$ existe et est continue en θ , $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $i, j \in \mathbb{X}$.
 3°/ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{d}{d\theta} p_t(i, j; \theta)$ existe uniformément en θ , $\forall i, j \in \mathbb{X}$.
 4°/ $\lim_{t \rightarrow 0} p_t(i, j; \theta) = \pi_j(\theta)$, $\forall i, j \in \mathbb{X}$ et $\theta \in \Theta$.
 5°/ $\frac{d^v}{d\theta^v} \pi_i(\theta)$ et $\frac{d^v}{d\theta^v} q_{ij}(\theta)$ existent et sont bornées pour $v=1, 2, 3$.

L'équation de vraisemblance s'écrit

$$(II-2-8) \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} L_T(\theta; \omega) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} \text{Log } \Pi_{X_0(\omega)}(\theta) - \frac{1}{T} \sum_{i \in \mathbb{X}} \tau_T(i; \omega) \frac{d}{d\theta} q_i(\theta) + \frac{1}{T} \sum_{i, j \in \mathbb{X}} N_T(ij; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log } q_{ij}(\theta) = 0 .$$

D'après la remarque du §1, par extension, lorsque toutes les conditions de (H_4^2) ne sont pas remplies, mais que (II-2-8) a un sens, nous l'appelons encore l'équation de vraisemblance. Et nous sommes conduits à énoncer la

PROPOSITION II-2-3. Sous (H_4^2) ,

- (i) L'équation de vraisemblance (II-2-8), équation en θ , possède une racine simple $\theta_T^*(\omega)$ pour $T \geq T_0(\omega)$, où T_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $T \rightarrow +\infty$, $\theta_T^* \rightarrow \theta_0$ p.s.
(ii) $\sqrt{T}(\theta_T^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne nulle et d'écart-type

$$\left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{d}{d\theta} L_T(\theta_0) \right\| \right)^{-1}.$$

APPLICATIONS.

1°/ Estimation des éléments de $Q = P'_0$.

Comme nous l'avons remarqué, la méthode du maximum de vraisemblance s'étend au cas de plusieurs paramètres. Supposons que nous ayons à estimer les q_{ij} et q_i à l'aide des $N_T(ij)$ et $\tau_T(i)$.

Notons par $\{q_{ij}^0, q_i^0\}_{i,j \in \mathcal{X}}$ les valeurs vraies de $\{q_{ij}, q_i\}_{i,j \in \mathcal{X}}$ et par $\{q_{ij}^*, q_i^*\}_{i,j \in \mathcal{X}}$ les estimateurs.

PROPOSITION II-2-4.

$$(i) \quad q_{ij}^* = \frac{N_T(ij)}{\tau_T(i)} \quad \text{et} \quad q_i^* = \frac{N_T(i\mathcal{X})}{\tau_T(i)},$$

(ii) Quand $T \rightarrow +\infty$, $q_{ij}^* \rightarrow q_{ij}^0$, p.s. et $q_i^* \rightarrow q_i^0$, p.s.

(iii) $\sqrt{T}(q_{ij}^* - q_{ij}^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type $\sqrt{\frac{1}{\prod_i q_{ij}^0}}$.

Démonstration.

(i) Nous savons que les q_{ij} et q_i sont liés par les relations $G_i \equiv \sum_k q_{ik} - q_i = 0$, $\forall i \in \mathcal{X}$. Mieux, nous pouvons regarder

$q_i = \sum_k q_{ik}$ comme une fonction des q_{ik} , qui seront alors considérés comme des variables indépendantes entre elles. Et nous avons, $\forall i, j \in \mathcal{X}$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_{ij}} L_T(q_{kl}; k, l \in \mathcal{X}) \right|_{q_{ij} = q_{ij}^*} = -\tau_T(i) + \frac{N_T(ij)}{q_{ij}^*} = 0.$$

Ce qui donne

$$q_{ij}^* = \frac{N_T(ij)}{\tau_T(i)}, \quad \forall i, j \in \mathcal{X}.$$

Comme estimateur de q_i^0 , il est naturel de prendre

$$q_i^* = \sum_k q_{ik}^* = \frac{N_T(i\mathcal{X})}{\tau_T(i)}.$$

Il est à remarquer, d'après ce que nous venons de faire, qu'il n'y a pas lieu de résoudre tout le système $\left\{ \frac{\partial}{\partial q_{ij}} L_T \right\}_{i,j \in \mathcal{X}} = 0$,

mais les équations indépendamment les unes des autres. Autrement dit, on peut considérer qu'il s'agit de l'estimation d'un paramètre inconnu q_{uv} , les autres étant fixés. La proposition II-2-3 peut s'appliquer et

(ii) s'en déduit immédiatement.

(iii) Un calcul facile montre que

$$-\frac{1}{T} E \frac{\partial^2}{\partial q_{ij}^2} L_T = \frac{\pi_i^0}{q_{ij}^0}.$$

Donc, $\sqrt{T} (q_{ij}^* - q_{ij}^0)$ suit une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type $\sqrt{\frac{1}{\pi_i^0} q_{ij}^0}$.

Nous verrons plus loin qu'un calcul direct de la variance asymptotique de $\sqrt{T} (q_{ij}^* - q_{ij}^0)$ donne bien le même résultat. Ce qui veut dire que la matrice des covariances asymptotiques de $\{\sqrt{T} (q_{ij}^* - q_{ij}^0)\}_{(i,j) \in \mathcal{X}^2}$ est une matrice diagonale.

2°/ Une estimation des éléments du vecteur Π , compatible avec celle des éléments de Q donnée ci-dessus.

A cause de la stationnarité stricte, on a $\Pi = P_t \Pi$.

D'où $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (I - P_t) \Pi = 0$, où I désigne la matrice identité.

On a donc

$$(II-2-9) \quad Q \Pi = 0.$$

Par compatibilité, nous désignons le fait que cette égalité (II-2-9) est vérifiée.

PROPOSITION II-2-5. $\exists$ un estimateur Π^* de Π^0 compatible avec Q^* donné ci-dessus :

$$(i) \quad \Pi^* = \left(\frac{1}{T} \tau_T(i) \right).$$

(ii) Π^* est sans biais, c'est à dire $E \Pi^* = \Pi^0$,

(iii) $\Pi^* \rightarrow \Pi^0$ p.s. et en m.q. quand $T \rightarrow +\infty$,

(iv) $\forall i \in \mathcal{X}$, $\sqrt{T}(\Pi_i^* - \Pi_i^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne nulle et d'écart-type σ tel que

$$\sigma^2 = 2 \Pi_i^0 \int_0^\infty dt \left[p_t^0(i, i) - \Pi_i^0 \right] < +\infty.$$

Démonstration.

(i) D'après la proposition II-2-1, il est naturel de prendre

$\Pi^* = \left(\frac{1}{T} \tau_T(i) \right)$, où Π^* désigne le vecteur dont les composantes sont les estimateurs des Π_i^0 .

Pour (iv), nous avons $\forall i \in \mathcal{X}$,

$$\sqrt{T} (\Pi_i^* - \Pi_i^0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\tau_T(i) - T \Pi_i^0 \right] = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (I_{i \circ X_t} - \Pi_i^0) dt$$

où $I_i(x)$ désigne l'indicateur de i .

Nous voyons donc que $\sqrt{T} (\Pi_i^* - \Pi_i^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type σ où σ est donné par

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\tau_T(i) - T \Pi_i^0 \right] \right\|^2 = 2 \Pi_i^0 \int_0^\infty dt \left[p_t^0(i, i) - \Pi_i^0 \right]$$

(voir [16] pour la tendance vers la loi de Laplace-Gauss).

2.3. ESTIMATION PAR LA METHODE DU Ψ^2 MINIMUM.

La partition de $\mathcal{X}$ est ici naturelle ($E = \mathcal{X}$). L'expression (II-1-10) devient

$$\Psi_T^2(\theta; \omega) = \sum_i \frac{[\tau_T(i; \omega) - T \pi_i(\theta)]^2}{T \pi_i(\theta)} + \sum_{i,j} \frac{[N_T(ij; \omega) - T \pi_i(\theta) q_{ij}(\theta)]^2}{T \pi_i(\theta) q_{ij}(\theta)}.$$

Et l'équation modifiée (II-1-12) devient

$$\begin{aligned} \text{(II-2-10)} \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta; \omega) &= \sum_{i \in \mathcal{X}} \frac{\tau_T(i; \omega) - T \pi_i(\theta)}{T \pi_i(\theta)} \frac{d}{d\theta} \pi_i(\theta) + \\ &+ \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{N_T(ij; \omega) - T \pi_i(\theta) q_{ij}(\theta)}{T \pi_i(\theta) q_{ij}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \pi_i(\theta) q_{ij}(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Soit l'hypothèse suivante

(H₄³) : a/ (H₄¹) est vérifiée, $\forall \theta \in \Theta$,

b/ $\frac{d^v}{d\theta^v} \pi_i(\theta)$, $\frac{d^v}{d\theta^v} q_{ij}(\theta)$ et $\frac{d^v}{d\theta^v} q_i(\theta)$ existent et sont

bornées pour $v = 1, 2, 3$.

L'équation précédente se réduit à

$$\begin{aligned} \text{(II-2-11)} \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta; \omega) &= \sum_i \frac{1}{T} \tau_T(i; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log } \pi_i(\theta) \\ &- \sum_i \frac{d}{d\theta} \pi_i(\theta) q_i(\theta) + \sum_{i,j} \frac{1}{T} N_T(ij; \omega) \frac{d}{d\theta} \text{Log} [\pi_i(\theta) q_{ij}(\theta)] = 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION II-2-6. Sous (H₄³),

(i) L'équation (II-2-11) possède une racine simple $\theta_T^*(\omega)$ pour $T \geq T_0(\omega)$ où T_0 est une v.a. presque-sûrement finie. Quand $T \rightarrow +\infty$, $\theta_T^* \rightarrow \theta_0$ p.s.

(ii) $\sqrt{T}(\theta_T^* - \theta_0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-

Gauss de moyenne 0 et d'écart-type σ , où σ est donné par

$$\sigma = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{T} \frac{d}{d\theta} Y_T(\theta_0) \right\|}{- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \frac{d^2}{d\theta^2} Y_T(\theta_0)}$$

APPLICATION : Estimation des éléments de Π et de Q .

Si les paramètres à estimer sont $\{\pi_i, q_i, q_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{X}}$, alors on a

PROPOSITION II-2-7. Le système (II-2-11) conduit aux estimateurs suivants

$$(i) \quad \pi_i^* = \frac{1}{T} \tau_T(i) \quad , \quad q_{ij}^* = \frac{N_T(ij)}{\tau_T(i)} \quad , \quad q_i^* = \frac{N_T(i\mathcal{X})}{\tau_T(i)} .$$

(ii) Quand $T \rightarrow +\infty$, $\pi_i^* \rightarrow \pi_i^0$ p.s. et en m.q. ; tandis que $q_{ij}^* \rightarrow q_{ij}^0$ p.s. et $q_i^* \rightarrow q_i^0$ p.s.

(iii) $\forall i, j \in \mathcal{X}$, $\sqrt{T}(q_{ij}^* - q_{ij}^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-

Gauss de moyenne 0 et d'écart-type $\sqrt{\frac{1}{\pi_i^0} q_{ij}^0}$; tandis que

$\sqrt{T}(\pi_i^* - \pi_i^0)$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type

$$\left(2 \pi_i^0 \int_0^\infty dt [p_t^0(i, i) - \pi_i^0] \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Démonstration.

$\{\pi_i, q_i, q_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{X}}$ sont reliés par les relations

$$F \equiv \sum_i \pi_i - 1 = 0 \quad \text{et} \quad G_i \equiv \sum_j q_{ij} - q_i = 0 ,$$

et la relation matricielle $Q\Pi = 0$ déjà citée.

Nous cherchons d'abord les solutions vérifiant F et les G_i ; puis éliminer celles qui ne vérifient pas (II-2-9), (si par hasard il en existe). L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange (α pour F , λ_i pour G_i) donne

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \pi_i} Y_T + \alpha \frac{\partial}{\partial \pi_i} F = \frac{1}{T \pi_i} [\tau_T(i) + N_T(i\mathcal{X})] - q_i + \alpha = 0 .$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial q_i} Y_T + \lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} G_i = -\Pi_i + \lambda_i = 0.$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial q_{ij}} Y_T + \lambda_i \frac{\partial}{\partial q_{ij}} G_i = \frac{N_T(ij)}{T q_{ij}} + \lambda_i = 0.$$

Ce qui conduit au résultat énoncé dans (i). Le reste de la proposition étant le même que celui des propositions II-2-4 et 5.

2.3. METHODE DU χ^2 MINIMUM.

L'expression (II-1-14) donnée, dans le paragraphe 1, s'écrit ici

$$(II-2-12) \quad \chi_T^2(\theta; \omega) = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{[N_T(ij; \omega) - q_{ij}(\theta) \tau_T(i; \omega)]^2}{q_{ij}(\theta) \tau_T(i; \omega)}$$

L'estimation par la méthode du χ^2 minimum conduit à l'équation suivante (équation modifiée):

$$\sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{N_T(ij; \omega) - q_{ij}(\theta) \tau_T(i; \omega)}{q_{ij}(\theta) \tau_T(i; \omega)} \cdot \tau_T(i; \omega) \frac{d}{d\theta} q_{ij}(\theta) = 0,$$

c'est à dire

$$(II-2-13) \quad - \sum_i \tau_T(i; \omega) \frac{d}{d\theta} q_i(\theta) + \sum_{i,j} N_T(ij; \omega) \frac{d}{d\theta} \log q_{ij}(\theta) = 0.$$

Ce n'est autre que l'équation de vraisemblance, où le premier terme a été négligé. La proposition II-2-3 établie pour la méthode du maximum de vraisemblance reste donc valable, de même pour les propositions (II-2-4) et (II-2-5). Ainsi, la méthode du χ^2 minimum et celle du maximum de vraisemblance sont asymptotiquement équivalentes. Mais un résultat propre à la première méthode peut être le suivant (en nous plaçant directement dans le cas de s paramètres):

PROPOSITION II-2-8.

(i) L'équation (II-2-13) possède une racine simple $\theta_T^*(\omega)$ pour $T \geq T_0(\omega)$ où T_0 est une v.a. presque-sûrement finie.

Quand $T \rightarrow +\infty$, $\theta_T^* \rightarrow \theta_0$ p.s.

(ii) L'expression
$$\sum_{i,j} \frac{[N_T(ij) - q_{ij}(\theta_T^*) \tau_T(i)]^2}{q_{ij}(\theta_T^*) \tau_T(i)}$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 à $r(r-1)-s$ degrés de liberté, s désignant la dimension de Θ .

Démonstration.

(i) est clair, et ne présente rien de nouveau.

(ii) Nous avons vu que $\frac{1}{\sqrt{T}} [N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i)]$ suit asymptotiquement une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et dont la variance vaut

$$\frac{1}{T} \|N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i)\|^2 = \pi_i q_{ij}. \text{ Ce calcul se}$$

fait rapidement à l'aide des formules (II-2-5), (II-2-6), (II-2-7)

Donc $\frac{N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i)}{\sqrt{\tau_T(i) q_{ij}}}$ suit asymptotiquement une loi de

Laplace-Gauss de moyenne 0 et d'écart-type 1.

D'autre part, $\forall i, j, k, \ell$, (d'après la formule (II-1-16))

$$\langle N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i), N_T(k\ell) - q_{k\ell} \tau_T(k) \rangle = T \delta_{ik} \delta_{j\ell} \pi_i q_{ij}.$$

Comme nous savons aussi que les v.a. multidimensionnelle (V_{ij}) est de Laplace-Gauss, où

$$V_{ij} = \frac{N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i)}{\sqrt{\tau_T(i) q_{ij}}};$$

(V_{ij}) est donc de Laplace-Gauss de moyenne 0 et sa matrice des covariances est une matrice diagonale; plus exactement, cette matrice est la matrice identité, à $r(r-1)$ lignes et $r(r-1)$ colonnes.

(Rappelons que par convention, $q_{ii} = 0$ et $N_T(ii) = 0$).

Ainsi, pour $(i,j) \neq (k,\ell)$ les v.a. V_{ij} et $V_{k\ell}$ sont asymptotiquement non corrélées, donc asymptotiquement indépendantes ici. La loi du χ^2 s'en déduit donc.

2.5. QUELQUES REMARQUES.

a/ Une autre méthode d'estimation.

Plaçons nous directement dans le cas de s paramètres et considérons l'expression

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} \frac{[\tau_T(i; \omega) - T \pi_i(\theta)]^2}{T \pi_i(\theta)} + \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{[q_i(\theta) N_T(ij; \omega) - N_T(i\mathcal{X}; \omega) q_{ij}(\theta)]^2}{N_T(i\mathcal{X}; \omega) q_{ij}(\theta) q_i(\theta)}$$

Elle conduit au système d'équations modifiées

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{i \in \mathcal{X}} \tau_T(i; \omega) \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \log \pi_i(\theta) + \frac{1}{T} \sum_{i,j \in \mathcal{X}} N_T(ij; \omega) \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \log q_{ij}(\theta) \\ - \frac{1}{T} \sum_{i \in \mathcal{X}} N_T(i\mathcal{X}; \omega) \frac{\partial}{\partial \theta^{(k)}} \log q_i(\theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad k=1, \dots, s.$$

Cette équation ne ressemble à aucune des équations considérées jusqu'à présent. En tout cas, on voit que l'on obtient facilement des résultats analogues à ceux énoncés dans la proposition II-2-3, savoir l'existence d'une racine simple θ_T^* pour T grand, et que cette racine θ_T^* converge p.s. vers θ_0 quand $T \rightarrow +\infty$, et que $\sqrt{T}(\theta_T^* - \theta_0)$ est asymptotiquement normale.

Cependant, si les paramètres à estimer sont $\{\pi_i, q_i, q_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{X}}$ le système (II-2-12) n'apporte pas de résultats satisfaisants.

En effet, sa résolution conduit à

$$\frac{q_i^*}{q_{ij}^*} = \frac{N_T(i\mathcal{X})}{N_T(ij)}.$$

Ce qui ne donne pas d'estimateurs de q_{ij}^0 et de q_i^0 mais seulement leur rapport.

b/ Sur les estimateurs linéaires.

Soit f une application qui, à $i \in \mathcal{X}$ fait correspondre un nombre $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Les estimateurs linéaires θ_T^* sont solutions de

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f \circ X_t](\omega) dt = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i(\theta) \alpha_i .$$

Nous renvoyons, pour plus de détails sur l'utilisation de cette méthode à [16] .

CHAPITRE III

TEST DE L'HYPOTHESE DE STATIONNARITE

A part T.W.Anderson et Leo A.Goodman (cf.[1]),le problème du test de l'hypothèse de stationnarité d'une fonction aléatoire Markovienne ne semble pas avoir été étudié. Ces deux auteurs n'ont d'ailleurs traité que des processus de Markov discrets à un nombre fini d'états. Dans ce qui suit,nous nous proposons d'examiner le cas des processus discrets aussi bien que celui des processus permanents. Les résultats sont cependant loins d'être complets,et bien des choses restent encore à faire,en particulier pour les processus permanents à un nombre infini d'états.

§1. CAS DES PROCESSUS DE MARKOV DISCRETS.

Nous nous servons de la loi du χ^2 lorsque l'espace des états est fini,et de la loi normale dans le cas général.

1.1. L'ESPACE DES ETATS $\mathcal{X}$ EST FINI.

Soit $\mathcal{X} = \{1,2,\dots,r\}$,et soit $[0,n-1]$, $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle d'observation.Nous distinguerons deux cas: celui d'une trajectoire $t \rightarrow X_t(\omega)$,ou plutôt d'un morceau de trajectoire correspondant à $t \in [0,n-1]$, et celui de v trajectoires.

Supposons donc que nous en avons v (v fixé):

$$\left\{ \omega_k \longrightarrow X_t(\omega_k) , t \in [0,n-1] \right\}_{k=1,2,\dots,v}$$

Notons $v^{<0>}(i) = \sum_{k=1}^v \mathbf{I}_{\{i\}} \circ X_0(\omega_k)$. Nous avons évidemment $\sum_{i \in \mathcal{X}} v^{<0>}(i) = v$, v fixé. Notons aussi

$$v^{<t>}(ij; \omega_1, \dots, \omega_v) = \sum_{k=1}^v I_{\{ij\}} \circ \hat{X}_t(\omega_k) \quad , \text{ où } \hat{X}_t \text{ a été}$$

définie au chapitre I (elle est à valeurs dans $\mathcal{X}^2$). $v^{<t>}(ij)$ peut donc être considérée comme une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité produit $(\Omega^v, \mathcal{A}^v, \text{Pr}^v)$ et à valeurs dans N (plus exactement à valeurs entières $\leq v$). Nous noterons sa valeur par $v^{<t>}(ij; \omega^v)$.

— Pour le cas non stationnaire, désignons par $\Pi_t(i) = \text{Pr}\{X_t(\omega) = i\}$ et par $p_{t,t+1}(i,j) = \text{Pr}\{X_{t+1}(\omega) = j \mid X_t(\omega) = i\}$. La vraisemblance, pour les v trajectoires, s'écrit

$$\prod_{k=1}^v \Pi_0[X_0(\omega_k)] \prod_{t=0}^{n-1} \prod_{i,j} p_{t,t+1}(i,j)^{v^{<t>}(ij)}.$$

L'estimateur (par la méthode du maximum de vraisemblance) de $p_{t,t+1}(i,j)$ est donné par

$$(III-1) \quad p_{t,t+1}^*(i,j) = \frac{v^{<t>}(ij)}{v^{<t-1>}(i)} \quad , \text{ où } v^{<t-1>}(i) = \sum_j v^{<t>}(ij).$$

En effet, tenant compte du fait que $\sum_j p_{t,t+1}(i,j) = 1$, les calculs ne diffèrent en rien à ceux du cas stationnaire avec une seule trajectoire (cf. chapitre I).

— Pour le cas stationnaire, la vraisemblance s'écrit

$$\prod_{k=1}^v \Pi_0[X_0(\omega_k)] \prod_{t=0}^{n-1} \prod_{i,j} p_{ij}^{v^{<t>}(ij)} = \prod_{k=1}^v \Pi_0[X_0(\omega_k)] \prod_{i,j} p_{ij}^{v(ij)}$$

$$\text{où } v(ij) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{<t>}(ij).$$

La méthode du maximum de vraisemblance donne l'estimateur suivant de p_{ij} :

$$(III-2) \quad v p_{ij}^* = \frac{v(ij)}{v(i\mathcal{X})} \quad , \text{ avec toutes les propriétés déjà}$$

énoncées pour le cas d'une seule trajectoire (cf. chapitre I).

Remarquons en passant que, pour l'espérance mathématique,

$$\begin{aligned} E v^{<t>}(ij) &= \int_{\Omega^v} \sum_{k=1}^v I_{\{ij\}} \hat{X}_t(\omega_k) dPr^v(\omega_1, \dots, \omega_v) \\ &= v \pi_t(i) \cdot p_{t-1,t}(i,j) , \end{aligned}$$

$$\text{et } E v^{<t-1>}(i\mathcal{X}) = v \pi_{t-1}(i) .$$

Nous allons maintenant nous occuper des tests: nous voulons tester l'hypothèse nulle H_0 que la fonction aléatoire est strictement stationnaire (c'est à dire que $\pi_t(i) = \pi_i$ et $p_{t,t+1}(i,j) = p_{ij}$) contre l'hypothèse H_1 que la fonction aléatoire n'est pas stationnaire.

a/ Cas de v trajectoires:

T.W.Anderson et Leo A.Goodman (cf. [1]) ont proposé l'utilisation d'un test du χ^2 , avec

$$\chi^2 = \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{j \in \mathcal{X}} v^{<t-1>}(i\mathcal{X}) \frac{[p_{t,t+1}^*(i,j) - v p_{ij}^*]^2}{v p_{ij}^*}$$

le nombre de degrés de liberté étant $r(r-1)(n-1)$; $p_{t,t+1}^*(i,j)$ et $v p_{ij}^*$ étant données par les formules (III-1) et (III-2) .

b/ Cas d'une seule trajectoire:

Nous savons que (cf. proposition I-2-8 du chapitre I), dans le cas stationnaire, quand $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{[N_n(ij) - p_{ij} N_n(i\mathcal{X})]^2}{p_{ij} N_n(i\mathcal{X})} \xrightarrow{L} \chi_{r(r-1)}^2$$

$r(r-1)$ désignant le nombre de degrés de liberté.

Si donc nous n'avons qu'une seule trajectoire $t \rightarrow X_t(\omega)$, nous pouvons proposer le test suivant: nous prenons deux sous-intervalles égaux et disjoints de $[0, n-1]$, par exemple

$\left[0, \frac{n}{2}-1\right]$ et $\left[\frac{n}{2}, n-1\right]$ (en supposant que n est pair). Notons par $N'_n(ij; \omega)$ (resp. $N''_n(ij; \omega)$) le nombre de fois que $X_t(\omega) = i$ et $X_{t+1}(\omega) = j$ pour $t \in \left[0, \frac{n}{2}-2\right]$ (resp. $t \in \left[\frac{n}{2}, n-2\right]$).

Si H_0 est vraie, nous savons que

$\frac{N'_n(ij)}{N'_n(i\mathcal{X})}$ et $\frac{N''_n(ij)}{N''_n(i\mathcal{X})}$ sont deux estimateurs de p_{ij} . Nous proposons donc de prendre pour χ^2 l'expression

$$\chi^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \frac{\left[\frac{N'_n(ij)}{N'_n(i\mathcal{X})} - \frac{N''_n(ij)}{N''_n(i\mathcal{X})} \right]^2}{\frac{N''_n(ij)}{N''_n(i\mathcal{X})} \frac{N'_n(i\mathcal{X})}{N''_n(i\mathcal{X})}}$$

1.2. GENERALISATION: ESPACE DES ETATS $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Nous n'avons pas pu, au chapitre I, établir un résultat sur la loi du χ^2 . Faute de mieux, nous allons nous tourner vers la loi normale. Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ où E est un ensemble fini d'indices, noté $\{1, \dots, r\}$ par exemple. Cette partition est choisie de préférence pour qu'aucun des A_i ne soit de probabilité négligeable par rapport aux autres.

Nous avons vu au chapitre I, avec la stationnarité et avec une seule trajectoire, que

$$\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) \longrightarrow \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j), \quad \text{p.s. et en m.q.}$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Il est facile de voir aussi que

$$\sqrt{n} \left[\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \Pi(dx) P(x, A_j) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma)$$

où (cf. formule (I-1-3) du chapitre I)

$$\sigma^2 = \int_{A_i} \pi(dx) P(x, A_j) \left[1 - \int_{A_i} \pi(dx) P(x, A_j) \right] \\ + 2 \int_{A_i} \pi(dx) \int_{A_j} P(x, dy) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_i} [P_k(y, du) - \pi(du)] P(u, A_j) .$$

Or σ est inconnu. Il y a donc lieu de considérer l'expression

$$(III-3) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \left[\frac{1}{n} N_n(A_i \times A_j) - \int_{A_i} \pi(dx) P(x, A_j) \right] \text{ qui } \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) ,$$

où σ_n est donné par (I-1-3) du chapitre I :

$$\sigma_n^2 = \int_{A_i} \pi(dx) P(x, A_j) \left[1 - \int_{A_i} \pi(dx) P(x, A_j) \right] \\ + 2 \int_{A_i} \pi(dx) \int_{A_j} P(x, dy) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k-1}{n} \int_{A_i} [P_k(y, du) - \pi(du)] P(u, A_j)$$

Cette expression σ_n^2 peut être estimée par

$$(III-4) \quad (\sigma_n^*)^2 = \frac{N_n(A_i \times A_j)}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \frac{N_n^{<1,1,k,1>}(A_i \times A_j \times A_i \times A_j)}{n} \\ - \left[\frac{N_n(A_i \times A_j)}{n} \right]^2$$

où $N_n^{<1,1,k,1>}(A_i \times A_j \times A_i \times A_j)$ désigne le nombre de fois que

$X_t \in A_i$ et $X_{t+1} \in A_j$ et $X_{t+k+1} \in A_i$ et $X_{t+k+2} \in A_j$.

a/ Cas d'une seule trajectoire:

Comme pour le cas où $\mathcal{X}$ est fini, nous prenons deux sous-intervalles égaux et disjoints de $[0, n-1]$, par exemple si n est pair, $[0, \frac{n}{2}-1]$ et $[\frac{n}{2}, n-1]$. Soit $N'_n(A_i \times A_j)$ (respectivement $N''_n(A_i \times A_j)$) le nombre de fois que $\hat{X}_t \in A_i \times A_j$ pour $t \in [1, \frac{n}{2}-1]$ (resp. $t \in [\frac{n}{2}+1, n-1]$). A la place de (III-3), nous formons

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n^*} \left[\frac{1}{n} N'_n(A_i \times A_j) - \frac{1}{n} N''_n(A_i \times A_j) \right]$$

où σ_n^* est donné par (III-4) ; et nous examinerons si les $\frac{1}{n} N'_n(A_i \times A_j)$ et $\frac{1}{n} N''_n(A_i \times A_j)$ diffèrent significativement l'un de l'autre.

Il existe r^2 expressions de ce genre, car $(i,j) \in E \times E$. Faute de savoir faire un test global, nous nous contentons de r^2 tests individuels.

b/ Cas de plusieurs trajectoires :

Avec v trajectoires, nous faisons un test analogue à celui du cas d'une seule trajectoire, en considérant

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n^*} \left[\frac{1}{n} v'_n(A_i \times A_j) - \frac{1}{n} v''_n(A_i \times A_j) \right]$$

où $v'_n(A_i \times A_j; \omega_1, \dots, \omega_v) = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v N'_n(A_i \times A_j; \omega_k)$; de même pour v''_n ; et où σ_n^* est donné par (III-4) avec v_n à la place de N_n .

Nous ne faisons ainsi pratiquement pas de distinction entre le cas d'une trajectoire et celui de v trajectoires (contrairement au cas où $\mathcal{X}$ est fini), à cause des difficultés dues à la présence de σ_n au dénominateur de (III-3).

§ 2. CAS DES PROCESSUS DE MARKOV PERMANENTS.

. Ici, nous nous occupons uniquement du cas où $\mathcal{X}$ est fini. Rappelons que, d'après la proposition II-2-8 du chapitre II traitant ce cas, avec une seule trajectoire:

$$\sum_{i,j} \frac{[N_T(ij) - q_{ij} \tau_T(i)]^2}{q_{ij} \tau_T(i)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{r(r-1)}$$

l'intervalle d'observation étant $[0, T]$.

a/ Cas d'une seule trajectoire:

Comme pour le cas des processus discrets, nous prenons deux sous-intervalles égaux et disjoints de l'intervalle $[0, T]$, par exemple $[0, \frac{T}{2})$ et $[\frac{T}{2}, T)$; et nous calculons $N_T'(ij)$ et $\tau_T'(i)$ (resp. $N_T''(ij)$ et $\tau_T''(i)$) pour $t \in [0, \frac{T}{2})$ (resp. $t \in [\frac{T}{2}, T)$).

D'après les résultats du chapitre II, sous la stationnarité,

$\frac{N_T'(ij)}{\tau_T'(i)}$ et $\frac{N_T''(ij)}{\tau_T''(i)}$ peuvent être pris tous deux comme estimateurs de q_{ij} . Nous proposons de prendre pour χ^2 l'expression

$$\sum_{i,j} \frac{\left[N_T'(ij) - \frac{N_T''(ij)}{\tau_T''(i)} \tau_T'(i) \right]^2}{\frac{N_T''(ij)}{\tau_T''(i)} \tau_T'(i)}$$

b/ Cas de plusieurs trajectoires:

$$\text{Posons } v_T(ij; \omega_1, \dots, \omega_v) = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v N_T(ij; \omega_k)$$

$$\text{et } \bar{\tau}_T(i; \omega_1, \dots, \omega_v) = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v \tau_T(i; \omega_k).$$

Un estimateur de q_{ij} peut être pris, dans ce cas, comme étant

$\frac{v_T(ij)}{\bar{\tau}_T(i)}$. Et un résultat analogue à celui du cas d'une seule trajectoire est

$$\sum_{i,j} \frac{[v_T(ij) - q_{ij} \bar{\tau}_T(i)]^2}{q_{ij} \bar{\tau}_T(i)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{r(r-1)}^2.$$

Nous ne faisons pas de distinction entre le cas actuel et celui d'une seule trajectoire:

Le test de l'hypothèse de stationnarité se fait en prenant

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{\left[v_T'(ij) - \frac{v_T''(ij)}{\bar{c}_T''(i)} \bar{c}_T'(i) \right]^2}{\frac{v_T''(ij)}{\bar{c}_T''(i)} \bar{c}_T'(i)}$$

D E U X I E M E P A R T I E

FONCTIONS ALEATOIRES DE COVARIANCE STATIONNAIRE MODULO T
ET PROCESSUS DE MARKOV

Composée de deux chapitres, cette seconde partie traite d'abord les fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T, et ensuite leur relation avec les processus de Markov. Un résumé du chapitre I est publié dans [11].

Ce n'est pas la première fois que l'on s'intéresse aux covariances périodiques: Gladyshev (cf. [20]) en a fait une étude. Mais il se place dans le cas stationnaire. Notre problème est un peu différent, en ce sens qu'il conduit à des covariances "presque" stationnaires, et la périodicité ne fait son apparition que dans les exemples. Nous essayons aussi d'adapter un théorème de Balakrishnan (cf. [2]) à notre cas. Il existe une généralisation de ce théorème (cf. [29]) mais elle est presque sans lien avec notre étude.

Dans ce qui suit, la terminologie est empruntée à [7]. Nous en rappelons ici l'essentiel: Soit $\{X_t, t \in \mathcal{G}\}$ une f.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ et à valeurs complexes ($\mathcal{G}$ est ici soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{Z}$) telle que $\forall t \in \mathcal{G}, X_t \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$. $\{X_t, t \in \mathcal{G}\}$ est dite de covariance stationnaire si $\forall t$ et $\tau \in \mathcal{G}, \mathbb{E} \overline{X_t} X_{t+\tau} = r(\tau)$ ne dépend que de τ . On appelle $r(\tau)$ fonction de corrélation. Si $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$, alors $\exists$ une fonction $F(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, monotone, non décroissante, bornée telle que $r(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\lambda\tau} dF(\lambda)$. Si $\mathcal{G} = \mathbb{R}$, moyennant l'hypothèse supplémentaire que X_t est continue en t au sens de la norme de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$, alors $\exists$ aussi $F(\lambda)$ telle que $r(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\lambda\tau} dF(\lambda)$. Dans les deux cas, $F(\lambda)$ s'appelle la

fonction spectrale.

fonction spectrale.

C H A P I T R E I'

Introduction aux FONCTIONS ALEATOIRES DE COVARIANCE STATIONNAIRE MODULO T.

Trois paragraphes composent ce chapitre: le premier est consacré à la définition et aux propriétés élémentaires, le second aux fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T dites "associées", et le troisième, à un exemple qui montrera combien les calculs se compliquent facilement.

§1. DEFINITIONS ET QUELQUES PROPRIETES.

Soit $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ une fonction aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$, à valeurs dans C. Nous supposons que $\mathcal{T}$ est : soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{Z}$.

DEFINITION. $T \in \mathcal{T}_+$ étant donné, $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dite de covariance stationnaire modulo T, si $\exists$ une fonction numérique à valeurs entières $k : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}$, et une fonction $r : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$, telles que

$$E \bar{X}_t X_{t+\tau} = r[\tau + k(t, \tau)T].$$

Nous désignerons par $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des valeurs prises par $k(t, 0)$, $t \in \mathcal{T}$.

Signalons les propriétés élémentaires suivantes

PROPOSITION I-1.

a/ La covariance stationnaire modulo T vérifie les propriétés suivantes

$$(i) \quad r(nT) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

$$(ii) \quad r[\tau + k(t, \tau)T] = \overline{r[-\tau + k(t+\tau, -\tau)T]}, \quad \bar{r} \text{ désignant le complexe conjugué de } r.$$

$$(iii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \text{ et } t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T},$$

$$\sum_{i,j} r[t_j - t_i + k(t_i, t_j - t_i)T] a_i \bar{a}_j \geq 0 .$$

b/ Toute fonction r à valeurs complexes des variables réelles t et t' de la forme $r[t' - t + k(t, t' - t)T]$ et vérifiant la propriété (iii), est la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T .

Démonstration.

a/ En effet,

$$(i) \quad r[k(t, 0)T] = \|X_t\|^2 \geq 0, \quad \forall t \in \mathcal{C},$$

$$(ii) \quad r[\tau + k(t, \tau)T] = E \bar{X}_t X_{t+\tau} \\ = E \overline{X_{t+\tau}} X_t = r[-\tau + k(t+\tau, -\tau)T],$$

(iii) Nous savons que toute covariance est définie positive.

b/ Nous savons aussi que toute fonction de type défini positif est covariance d'une fonction aléatoire. Si r est de la forme indiquée par l'énoncé, elle est forcément la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T .

PROPOSITION I-2. La somme de deux fonctions aléatoires non corrélées, et de covariance stationnaire modulo T , l'une d'elles étant de plus stationnaire du premier ordre, est une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T , si dans leur définition, $k_1(\dots) \equiv k_2(\dots)$.

Démonstration. L'une des deux fonctions aléatoires,

$\{X_t, t \in \mathcal{C}\}$ par exemple étant stationnaire du premier ordre, on a $EX_t = \text{Cte}$, $\forall t \in \mathcal{C}$. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $EX_t = 0$, $\forall t \in \mathcal{C}$. Supposons que

$$E \bar{X}_t X_{t+\tau} = r_1[\tau + k_1(t, \tau)T]$$

$$\text{et} \quad E \bar{Y}_t Y_{t+\tau} = r_2[\tau + k_2(t, \tau)T],$$

alors

$$E(\bar{X}_t + \bar{Y}_t)(X_{t+\tau} + Y_{t+\tau}) = r_1[\tau + k_1(t, \tau)T] + r_2[\tau + k_2(t, \tau)T].$$

Ce qui montre que $\{X_t + Y_t, t \in \mathcal{G}\}$ est de covariance stationnaire modulo T , si $k_1(\dots) = k_2(\dots)$, $\forall (t, \tau) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que la fonction aléatoire $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ de covariance stationnaire modulo T est mesurable (cf. [13]) et réelle (pour simplifier l'exposé). Le cas des fonctions aléatoires discrètes ($\mathcal{G} = \mathbb{N}$) se transpose facilement de celui ci.

La recherche d'une fonction définie positive ne dépendant que de τ nous conduit à considérer l'expression

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U r[\tau + k(t, \tau)T] dt, \text{ lorsqu'elle existe.}$$

L'idée de prendre la moyenne temporelle de $EX_t X_{t+\tau}$ en t dans le cas d'une fonction aléatoire de covariance non stationnaire est due à Blanc-Lapierre et Fortet (cf. [7]). Nous l'appliquons ici pour notre covariance stationnaire modulo T .

$$\text{Posons } \frac{1}{U} \int_0^U X_t X_{t+\tau} dt = \gamma_\tau^{(U)} \quad (\text{intégrale L-stochastique})$$

et supposons que $\gamma_\tau = \lim_{U \rightarrow +\infty} \text{p.s. } \gamma_\tau^{(U)}$ existe et que

$$E\gamma_\tau = \lim_{U \rightarrow +\infty} E\gamma_\tau^{(U)} < +\infty, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

$$\Phi(\tau) = \lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U r[\tau + k(t, \tau)T] dt < +\infty \text{ existe donc}$$

et nous l'appelons la fonction de corrélation généralisée de $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Les conditions imposées seront satisfaites dans les cas particuliers que nous étudierons plus loin.

Signalons enfin que γ_τ est une fonction aléatoire presque sûrement définie positive; on peut s'en convaincre en utilisant une démonstration analogue à celle donnée dans [4] pour les fonctions "pseudo aléatoires".

La notion de fonction de corrélation généralisée conduit naturellement à celle de la fonction spectrale généralisée: Si la fonction de corrélation généralisée $\Phi(\tau)$ est continue pour $\tau = 0$, alors $\exists$ une fonction $G(\lambda)$ monotone, non décroissante, bornée, telle que

$$\Phi(\tau) = \int_0^{+\infty} \cos 2\pi\lambda\tau dG(\lambda).$$

Nous appelons $G(\lambda)$ fonction spectrale généralisée.

Les résultats concernant les fonctions aléatoires à valeurs complexes s'obtiennent de la même façon que pour celles à valeurs réelles que nous étudions.

§ 2. FONCTIONS ALEATOIRES DE COVARIANCE STATIONNAIRE MODULO T " ASSOCIEES ".

Dans ce qui suit, nous noterons par $e(x)$, x étant $\in \mathbb{R}$, la partie entière de x . Plus précisément,

$$e(x) = \sup \{ n : n \leq x, n \in \mathbb{N} \} \quad \text{si } x \geq 0, \\ \text{et } e(x) = -e(-x) \quad \text{si } x < 0.$$

D'abord un résultat préliminaire.

LEMME. Considérons les trois ensembles suivants

$$A_i = \left\{ (t, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) + \delta_i \right] T - \tau \leq t - e\left(\frac{t}{T}\right) T < \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) + 1 + \delta_i \right] T - \tau \right\}$$

où $\delta_i = 0, 1, -1$ respectivement pour $i = 1, 2, 3$. Ces trois ensembles A_1, A_2, A_3 forment une partition de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

Puisque dans la définition des ensembles A_i ne figurent que $t - e\left(\frac{t}{T}\right)T$ et $\tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T$, et puisque $t \geq 0$, nous pouvons ramener au cas où $0 \leq t < T$ et $-T \leq \tau < T$. Ce cas est facile à vérifier.



Soit $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$ une fonction aléatoire réelle de covariance stationnaire, continue en m.q., avec $E\tilde{X}_t\tilde{X}_{t+\tau} = r(\tau)$.
 soit $T \in \mathbb{R}_+$ une constante > 0 , et soit $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire définie de la façon suivante:

$$\begin{cases} Y_t = \tilde{X}_t & , \text{ pour } 0 \leq t < T, \text{ et} \\ Y_{t+T} = Y_t & , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ . \end{cases}$$

PROPOSITION I-3. La fonction aléatoire $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ telle qu'elle vient d'être définie, est une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T , avec

$$k(t, \tau) = -e\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot I_{B_1}(t, \tau) - \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) + 1\right] \cdot I_{B_2}(t, \tau) - \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) - 1\right] \cdot I_{B_3}(t, \tau)$$

où $D = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : t + \tau \geq 0\}$ et $B_i = A_i \cap D$, $i = 1, 2, 3$.

Nous appelons $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à la fonction aléatoire de covariance stationnaire $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, ou simplement f.a."associée".

Démonstration. On a d'abord

$$\begin{aligned} E Y_t Y_{t'} &= E Y_{t - e\left(\frac{t}{T}\right)T} Y_{t' - e\left(\frac{t'}{T}\right)T} \\ &= r\left(t' - t - \left[e\left(\frac{t'}{T}\right) - e\left(\frac{t}{T}\right)\right]T\right) = r\left[\tau - k(t, t' - t)T\right] . \end{aligned}$$

Montrons maintenant que, sur chacun des ensembles A_i , $k(t, t' - t)$ est en réalité fonction de $t' - t$ seulement. En effet, on doit avoir $|\tau - kT| < T$, (d'après la définition de Y_t), c'est à dire

$$\frac{\tau}{T} - 1 < k < \frac{\tau}{T} + 1 .$$

Donc k peut prendre les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} k &= 0 & \text{si } \tau = 0 , \\ k &= e\left(\frac{\tau}{T}\right) \text{ ou } e\left(\frac{\tau}{T}\right) + 1 & \text{si } \tau > 0 , \\ k &= e\left(\frac{\tau}{T}\right) \text{ ou } e\left(\frac{\tau}{T}\right) - 1 & \text{si } \tau < 0 . \end{aligned}$$

De plus, on doit avoir, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $t + \tau \in \mathbb{R}_+$,



$$e\left(\frac{t}{T}\right)T \leq t+\tau - kT < \left[e\left(\frac{t}{T}\right) + 1\right]T .$$

Autrement dit

$$k(t,\tau) = \begin{cases} -e\left(\frac{\tau}{T}\right) & \text{si } (t,\tau) \in B_1 \\ -\left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) + 1\right] & \text{si } (t,\tau) \in B_2 \\ -\left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) - 1\right] & \text{si } (t,\tau) \in B_3 . \end{cases}$$

PROPOSITION I-4. La fonction de corrélation généralisée de la fonction aléatoire $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ vaut

$$\Phi(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) r(\tau_0) + \frac{|\tau_0|}{T} r(T - |\tau_0|) ,$$

où $\tau_0 = \tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T$.

De plus, Φ est périodique : $\Phi(\tau) = \Phi(\tau + nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$
et Φ est paire : $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$.

Démonstration. Montrons d'abord que, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{T} \int_{mT}^{(m+1)T} r[\tau + k(t,\tau)T] dt = \left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) r(\tau_0) + \frac{|\tau_0|}{T} r(T - |\tau_0|)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{--- Pour } \tau \geq 0, \quad & \int_{mT}^{(m+1)T} r[\tau + k(t,\tau)T] dt \\ &= \int_{mT}^{\left[m+1+e\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]T - \tau} r\left[\tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T\right] dt + \int_{\left[m+1+e\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]T - \tau}^{(m+1)T} r\left[\tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T - T\right] dt \\ &= (T - \tau_0) r(\tau_0) + \tau_0 r(\tau_0 - T) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{--- Pour } \tau < 0, \quad & \int_{mT}^{(m+1)T} r[\tau + k(t,\tau)T] dt = \\ &= \int_{mT}^{\left[m+e\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]T - \tau} r\left[\tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T + T\right] dt + \int_{\left[m+e\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]T - \tau}^{(m+1)T} r\left[\tau - e\left(\frac{\tau}{T}\right)T\right] dt \\ &= -\tau_0 r(T + \tau_0) + (T + \tau_0) r(\tau_0) . \end{aligned}$$

De là, il est clair que

$$\frac{1}{nT} \int_0^{nT} r[\tau + k(t, \tau)T] dt = (1 - \frac{|\tau_0|}{T}) r(\tau_0) + \frac{|\tau_0|}{T} r(T - |\tau_0|).$$

Mieux, cette expression est égale à

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U r[\tau + k(t, \tau)T] dt.$$

En effet, remarquons d'abord, que

$$0 \leq U - e(\frac{U}{T})T < T \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{U} e(\frac{U}{T})T < \frac{T}{U} \Rightarrow \frac{1}{U} e(\frac{U}{T})T \rightarrow 1, \\ \text{quand } U \rightarrow +\infty. \text{ Puis}$$

$$\frac{1}{U} \int_0^U = \frac{1}{U} e(\frac{U}{T})T \cdot \frac{1}{e(\frac{U}{T})T} \cdot \left[\int_0^{e(\frac{U}{T})T} + \int_{e(\frac{U}{T})T}^U \right] \longrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T.$$

$$\text{Or, } \lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U E = E \lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U (= \frac{1}{T} \int_0^T E). \text{ D'où l'énoncé.}$$

Comme corollaire de cette proposition, nous avons la

PROPOSITION I-5. La fonction spectrale généralisée d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q. existe toujours et a ses masses concentrées aux points $\frac{n}{T}$, $n \in \mathbb{N}$. On a

$$G(\frac{n}{T}) = \sum_{i=0}^n a_i, \text{ avec } \Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau \cdot a_n.$$

PROPOSITION I-6. La fonction spectrale $G_1(\lambda)$ d'une fonction aléatoire réelle $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ continue en m.q. et de covariance stationnaire étant donnée, la fonction spectrale généralisée $G(\lambda)$ de la fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ s'exprime en fonction de $G_1(\lambda)$ à l'aide de la formule suivante

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2\pi \lambda T) \left[\frac{1}{(\lambda T + n)^2} + \frac{1}{(\lambda T - n)^2} \right] dG_1(\lambda)$$

pour $n \geq 1$, et

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{(\lambda T)^2} dG_1(\lambda) \quad , \quad \text{pour } n = 0 .$$

Démonstration.

La fonction aléatoire $\{\tilde{X}_t, t \in R_+\}$ étant réelle, nous avons

$$r(\tau) = \int_0^{+\infty} \cos 2\pi\lambda\tau dG_1(\lambda) .$$

Remarquons d'abord que

$$(a) \quad \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos A\tau d\tau = \frac{1 - \cos AT}{TA^2} ,$$

$$(b) \quad \int_0^T \frac{\tau}{T} \cos 2\pi(B\tau - C) d\tau = \frac{\sin 2\pi(BT - C)}{2\pi B} + \\ + \frac{\cos 2\pi(BT - C) - \cos 2\pi C}{T(2\pi B)^2} .$$

Nous avons, $\forall n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau \cdot \Phi(\tau) d\tau \\ = \frac{2}{T} \int_0^T \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau \cdot \left[\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) r(\tau) + \frac{\tau}{T} r(\tau - T) \right] d\tau .$$

Exprimée en fonction de $G_1(\lambda)$, cette expression vaut

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \int_0^{+\infty} \cos 2\pi\lambda\tau dG_1(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{T} \int_0^{+\infty} \cos 2\pi\lambda(\tau - T) dG_1(\lambda) \right\} d\tau \\ = \int_0^{+\infty} dG_1(\lambda) \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left[\cos 2\pi\left(\lambda + \frac{n}{T}\right)\tau + \cos 2\pi\left(\lambda - \frac{n}{T}\right)\tau \right] \right. \\ \left. + \frac{\tau}{T} \left(\cos 2\pi\left[\left(\lambda + \frac{n}{T}\right)\tau - \lambda T\right] + \cos 2\pi\left[\left(\lambda - \frac{n}{T}\right)\tau - \lambda T\right] \right) d\tau \right\}$$

L'expression entre les deux accolades se décompose en quatre termes, dont les deux premiers se calculent à l'aide de (a),



et les deux derniers à l'aide de (b).

$$\text{Le premier : } \frac{1 - \cos 2\pi(\lambda + \frac{n}{T})T}{T^2 4\pi^2(\lambda + \frac{n}{T})^2} = \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{4\pi^2(\lambda T + n)^2}$$

$$\text{Le deuxième : } \frac{1 - \cos 2\pi(\lambda - \frac{n}{T})T}{T^2 4\pi^2(\lambda - \frac{n}{T})^2} = \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{4\pi^2(\lambda T - n)^2}$$

De la même façon, les calculs nous permettent d'obtenir

$$\text{Le troisième : } \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{4\pi^2(T\lambda + n)^2}, \text{ et}$$

$$\text{le quatrième : } \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{4\pi^2(T\lambda - n)^2}.$$

D'où finalement, nous avons, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos 2\pi\lambda T) \left[\frac{1}{(\lambda T + n)^2} + \frac{1}{(\lambda T - n)^2} \right] dG_1(\lambda).$$

Pour $n = 0$, nous avons

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{(\lambda T)^2} dG_1(\lambda).$$

Ces intégrales ont un sens. En effet, pour $\lambda \rightarrow +\infty$, il n'y a pas de difficulté. Pour les points $\frac{n}{T}$, posons $\lambda - \frac{n}{T} = \varepsilon$.

$$\text{Alors } 1 - \cos 2\pi(\frac{n}{T} + \varepsilon)T = 1 - \cos 2\pi\varepsilon T \sim 2\pi^2 \varepsilon^2 T^2.$$

$$\text{Donc } \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{(\lambda T - n)^2} \rightarrow 2\pi^2, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ESTIMATION.

Supposons que $G_1(\lambda)$ est inconnue. Il en est alors de même de $G(\lambda)$. Nous nous proposons d'estimer $G(\lambda)$.

Dans ce qui suit, nous supposons que $G_1(\lambda)$ possède une densité spectrale $g(\lambda)$. Désignons par g_β^* un estimateur de g

construit à l'aide d'un morceau de trajectoire $\{\tilde{X}_t(\omega)\}_{t \in [0, \beta]}$.
L'idée naturelle est de prendre comme estimateur de G , G_β^* exprimée en fonction de g_β^* à l'aide de la formule donnée dans la proposition I-7.

Nous inspirant d'un article de E. Parzen (cf. [25]), nous donnons les définitions suivantes (qui ne sont pas celles de Parzen):

DEFINITION. Soit $\alpha > 0$. Un estimateur g_β^* de g est dit convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$ si $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^\alpha \|g_\beta^*(\lambda) - g(\lambda)\| = C(\lambda) < +\infty,$$

$\|\cdot\|$ désignant ici la norme de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$.

DEFINITION. Un estimateur G_β^* de G est dit convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$ si $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^\alpha \|a_{n,\beta}^* - a_n\| = h(n) < +\infty.$$

PROPOSITION I-7. Si g_β^* est un estimateur de g , convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$, et si $C(\lambda)$ est tel que

$$\int_0^{+\infty} \frac{C(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda < +\infty,$$

alors G_β^* est un estimateur de G , convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} & \|a_{n,\beta}^* - a_n\|^2 = \\ &= E \left(\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos 2\pi\lambda T) \left[\frac{1}{(\lambda T + n)^2} + \frac{1}{(\lambda T - n)^2} \right] [g_\beta^*(\lambda) - g(\lambda)] d\lambda \right)^2 \end{aligned}$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$A_n(\lambda) = (1 - \cos 2\pi\lambda T) \left[\frac{1}{(\lambda T + n)^2} + \frac{1}{(\lambda T - n)^2} \right] \geq 0.$$

Alors

$$\|a_{n,\beta}^* - a_n\|^2 = \frac{1}{4\pi^4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A(x)A(y) \cdot E \left[g_\beta^*(x) - g(x) \right] \left[g_\beta^*(y) - g(y) \right] dx dy$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$E \left[g_\beta^*(x) - g(x) \right] \left[g_\beta^*(y) - g(y) \right] \leq \|g_\beta^*(x) - g(x)\| \cdot \|g_\beta^*(y) - g(y)\| ,$$

on a alors

$$0 \leq \beta^{2\alpha} \|a_{n,\beta}^* - a_n\|^2 \leq \frac{1}{4\pi^4} \left(\int_0^{+\infty} A(\lambda) \cdot \beta^\alpha \cdot \|g_\beta^*(\lambda) - g(\lambda)\| d\lambda \right)^2$$

D'où finalement

$$0 \leq \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^\alpha \|a_{n,\beta}^* - a_n\| \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} A(\lambda) C(\lambda) d\lambda .$$

Comme $C(\lambda) \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{(\lambda T + n)^2} C(\lambda) d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda T}{(\lambda T - n)^2} C(\lambda) d\lambda < +\infty ,$$

cette dernière condition étant équivalente à

$$\int_0^{+\infty} \frac{C(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda < +\infty ,$$

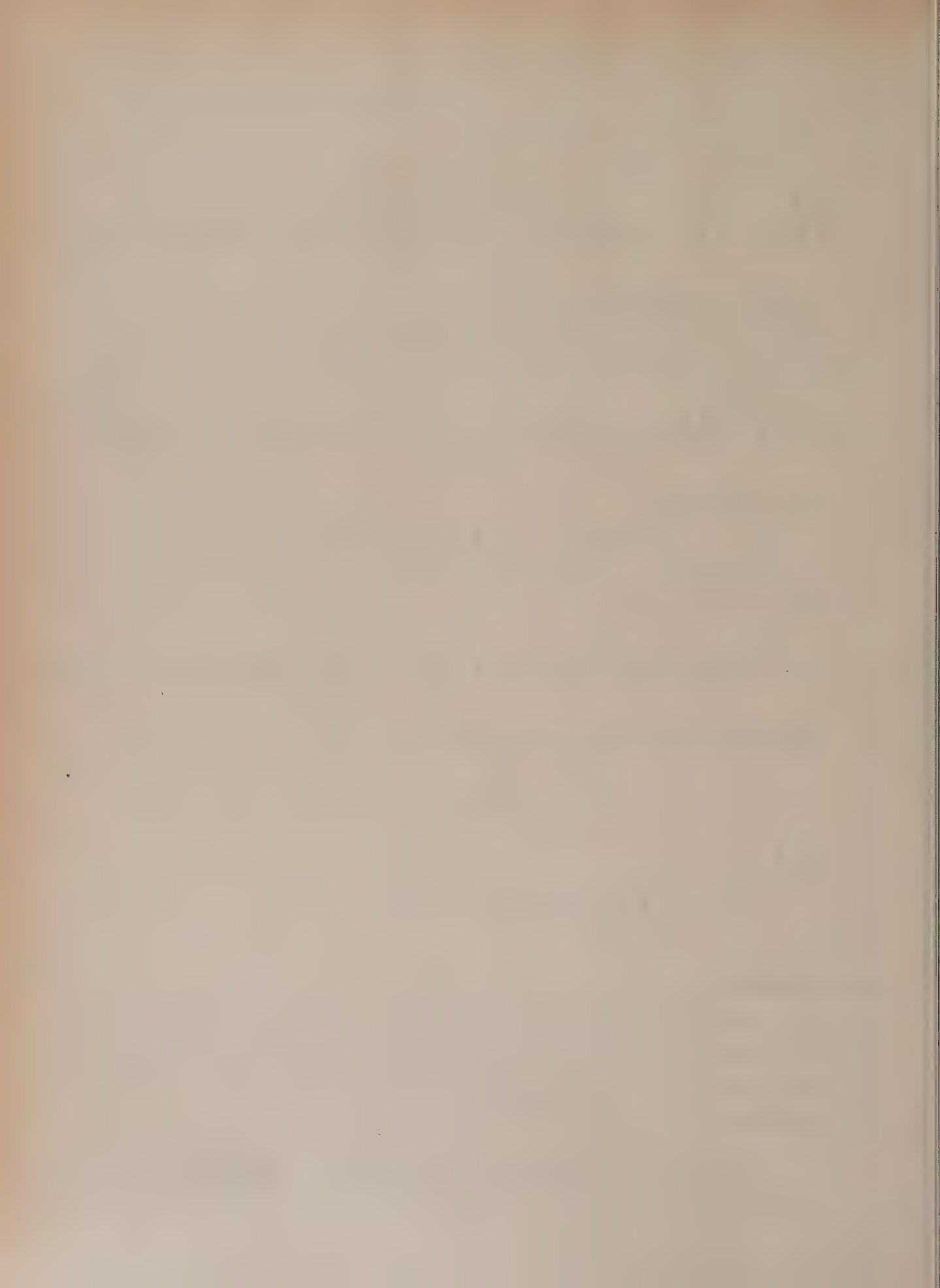
nous avons bien

$$0 \leq \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^\alpha \|a_{n,\beta}^* - a_n\| < +\infty .$$

CAS COMPLEXE.

Nous avons dit précédemment que l'étude du cas complexe est analogue à celle du cas réel. Nous énonçons cependant deux résultats, l'un d'eux interviendra plus loin, mais nous ne faisons pas de démonstrations.

Soit donc $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$ de covariance stationnaire et continue en m.q. donnée. Nous savons, d'après le théorème de repré-



sensation spectrale (cf. [13] p.527) , que

$$\tilde{X}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi t\lambda) d\xi(\lambda) \quad \text{où } \xi(\lambda) \text{ est une fonction}$$

aléatoire à accroissements orthogonaux, avec

$$\|d\xi(\lambda)\|_{L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})}^2 = dF_1(\lambda) .$$

Considérons maintenant la fonction aléatoire $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, de covariance stationnaire modulo T associée à la fonction aléatoire $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$. D'après sa définition, il est clair qu'elle s'exprime en fonction de $\xi(\lambda)$ sous la forme

$$Y_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i2\pi \lambda \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \right\} d\xi(\lambda) .$$

A l'aide de cette représentation, nous énonçons la proposition I-3 dans le cas complexe:

PROPOSITION I-3 bis. τ_0, B_1, B_2, B_3 étant les mêmes que dans la proposition I-3, nous avons

$$E \bar{Y}_t Y_{t+\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i2\pi \lambda \left[\tau_0 \cdot I_{B_1}(t, \tau) + (\tau_0 - T) \cdot I_{B_2}(t, \tau) + (\tau_0 + T) \cdot I_{B_3}(t, \tau) \right] \right\} dF_1(\lambda)$$

De même, la proposition I-4 devient

PROPOSITION I-4 bis. La fonction de corrélation généralisée de la fonction aléatoire $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ vaut

$$\Phi(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) r(\tau_0) + \frac{|\tau_0|}{T} r \left[(|\tau_0| - T) \left(I_{R_+}(\tau) - I_{R_+^c}(\tau) \right) \right]$$

Signalons pour terminer qu'une démonstration de I-3 bis peut se faire à l'aide de l'étude de $e\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$ qui, selon les cas est égale à $e\left(\frac{t}{T}\right) + e\left(\frac{\tau}{T}\right) \pm 1$.



ESSAI D'ADAPTATION D'UN THEOREME DE BALAKRISHNAN au cas des fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T "associées".

L'étude suivante s'inspire d'un article de A.V. Balakrishnan (cf. [3]). Mais au lieu de considérer une covariance stationnaire, nous considérons une covariance stationnaire modulo T. Le but essentiel est de déterminer les conditions sous lesquelles $\gamma(t, t') - \overline{m(t)} m(t')$ est une covariance, sachant que $\gamma(t, t')$ en est une, et que $m(t)$ est une fonction définie sur R_+ et à valeurs complexes. En fait, nous allons nous restreindre au cas où $\gamma(t, t')$ est la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q.

Nous suivrons les démonstrations de [3] presque point par point, et nous verrons que les résultats obtenus pour le cas stationnaire ne sont pas tous adaptables au cas stationnaire modulo T.

Nous aurons affaire, dans ce qui suit, à deux espaces de Hilbert: l'espace $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ que nous noterons L_2 simplement, et l'espace $L_2(R, dF_1)$ que nous noterons L'_2 .

PROPOSITION I-8. Soit $r[\tau + k(t, \tau)T]$ la covariance d'une fonction aléatoire $\{Y_t, t \in R_+\}$ de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire $\{\tilde{X}_t, t \in R\}$ de covariance stationnaire et continue en m.q. Soit $m(t)$ une fonction à valeurs complexes de la variable $t \in R_+$.

(i) Une condition suffisante pour que

$$(I-1) \quad \Gamma(t, t') = r[t' - t + k(t, t' - t)T] - \overline{m(t)} m(t')$$

soit une covariance est que $m(t)$ ait la représentation suivante



$$(I-2) \quad m(t) = \int_R \exp \left\{ i2\pi \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \lambda \right\} d\mu(\lambda) ,$$

où $\mu(\cdot)$ est à variation bornée, et où $d\mu \ll dF_1$, avec

$$(I-3) \quad \left\| \frac{d\mu}{dF_1} \right\|_{L'_2} \leq 1 ,$$

F_1 désignant la fonction spectrale de $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Cette condition suffisante est aussi nécessaire si de plus, $EY_t = m(t)$.

Démonstration.

(i) Condition suffisante : il nous faut montrer que $\Gamma(t, t')$ est définie positive. Or nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \overline{m(t_i)} m(t_j) \bar{a}_i a_j &= \left| \sum_j m(t_j) a_j \right|^2 \\ &\leq \left\| \sum_j a_j e^{i2\pi \left[t_j - e\left(\frac{t_j}{T}\right)T \right] \lambda} \right\|_{L'_2}^2 \cdot \left\| \frac{d\mu}{dF_1} \right\|_{L'_2}^2 \\ &\leq \left\| \sum_j a_j e^{i2\pi \left[t_j - e\left(\frac{t_j}{T}\right)T \right] \lambda} \right\|_{L'_2}^2 , \text{ d'après (I-3).} \end{aligned}$$

Or, d'après (I-1) et d'après la représentation de Y_t sous la forme $\int_R \exp \left\{ i2\pi \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \lambda \right\} d\xi(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Gamma(t_i, t_j) \bar{a}_i a_j &= \\ &\left\| \sum_j a_j e^{i2\pi \left[t_j - e\left(\frac{t_j}{T}\right)T \right] \lambda} \right\|_{L'_2}^2 - \left| \sum_j m(t_j) a_j \right|^2 \geq 0 . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Gamma(t, t')$ est définie positive.



(ii) Condition nécessaire : supposons que $\Gamma(t, t')$ soit une covariance. Nous savons qu'il existe une fonction aléatoire Laplacienne $\{Z_t, t \in R_+\}$ de moyenne 0 et de covariance $E \bar{Z}_t Z_{t'} = \Gamma(t, t')$. D'après (I-1), si $t=t'$, nous aurons

$$|m(t)|^2 = r[k(t, 0)T] - \Gamma(t, t) \geq 0.$$

Or $\Gamma(t, t) \geq 0$ et $r[k(t, 0)T] \geq 0$, et de plus

$$r[k(t, 0)T] = \|Y_t\|_{L_2}^2 = \|\tilde{X}_0\|_{L_2}^2 < +\infty.$$

D'où $m(t)$ est nécessairement bornée.

Considérons maintenant $y_t = Z_t + m(t)$. Nous avons alors

$$E \bar{y}_t y_{t'} = \Gamma(t, t') + \overline{m(t)} m(t') = r[t'-t + k(t, t'-t)T],$$

de sorte que y_t est de covariance stationnaire modulo T .

Mieux,

$$(I-4) \quad E \bar{y}_t y_{t'} = E \bar{Y}_t Y_{t'},$$

Or, nous savons que $Y_t = \int_R \exp \left\{ i2\pi \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \lambda \right\} d\xi(\lambda)$,

où $\xi(\lambda)$ est à accroissements orthogonaux, avec $\|d\xi(\lambda)\|_{L_2}^2 = dF_1(\lambda)$. Posons maintenant

$$\mu(\lambda) = E [\xi(\lambda) - \xi(\lambda_0)] , \text{ pour } \lambda_0 \text{ fixé.}$$

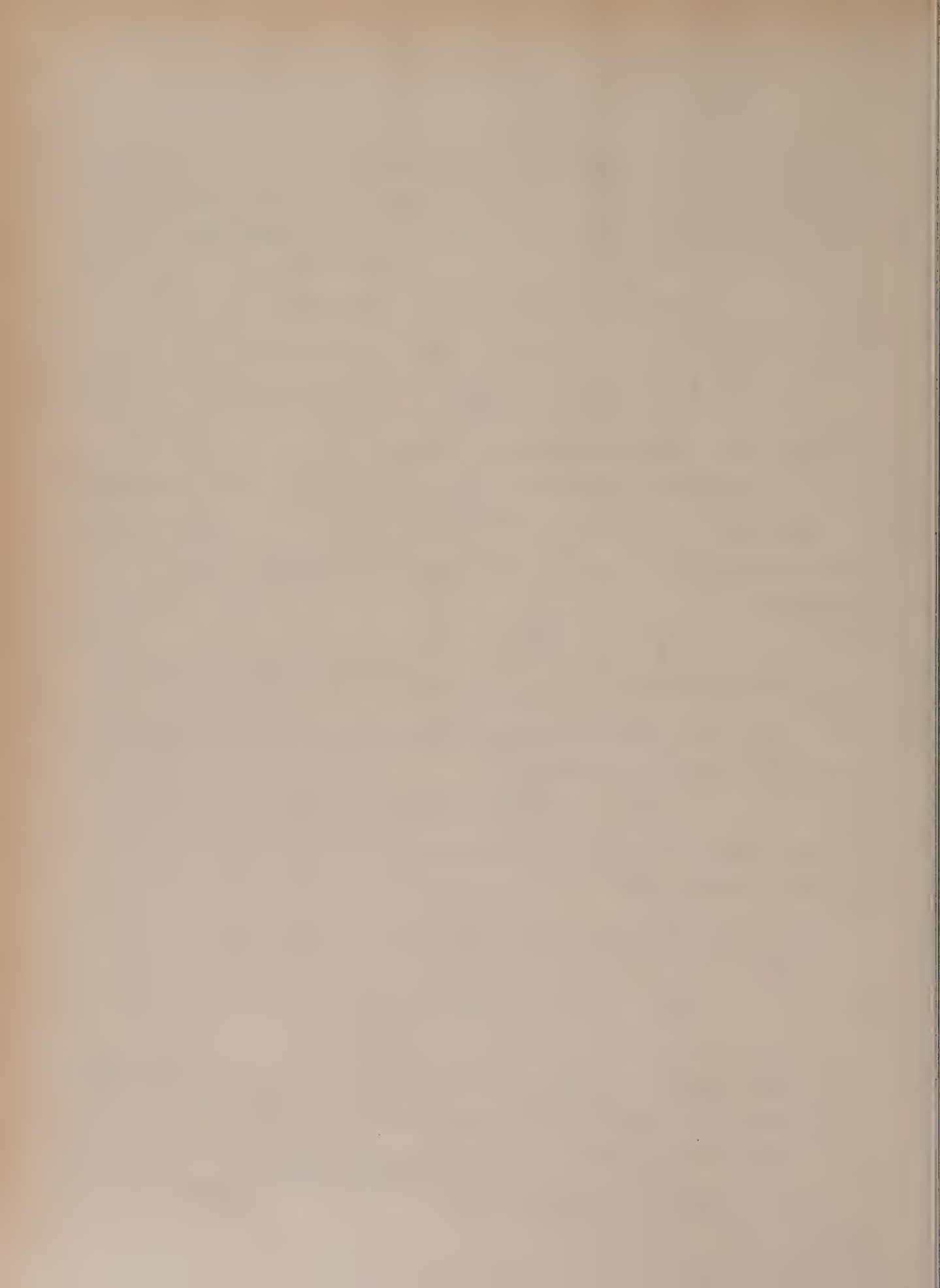
Alors, pour un nombre fini quelconque d'intervalles disjoints (a_i, b_i) , nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_i [\mu(b_i) - \mu(a_i)] \right|^2 &\leq \left\| \sum_i [\xi(b_i) - \xi(a_i)] \right\|_{L_2}^2 \\ &= \sum_i \int_{a_i}^{b_i} dF_1(\lambda), \end{aligned}$$

de sorte que $\mu(\lambda)$ est à variation bornée, et aussi absolument continue par rapport à la mesure dF_1 sur $(R, \mathcal{R})$.

Nous avons de plus

$$E y_t = m(t) = E Y_t = \int_R e^{i2\pi \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \lambda} d\mu(\lambda).$$



Pour démontrer (I-3), considérons $f \in L'_2$. Alors

$A(f) = \int_R f(\lambda) d\mu(\lambda) = E \int_R f(\lambda) d\xi(\lambda)$ définit une fonctionnel-

le linéaire sur L'_2 . Nous avons

$$|A(f)|^2 \leq \left\| \int_R f(\lambda) d\xi(\lambda) \right\|^2 \leq \|f\|_{L'_2}^2.$$

D'où
$$\|A\| = \sup_{f \in L'_2} \frac{|A(f)|}{\|f\|_{L'_2}} \leq 1.$$

$A(f)$ étant une fonctionnelle linéaire sur L'_2 , elle peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire :

$$\int_R f(\lambda) d\mu(\lambda) = \langle f, g \rangle_{L'_2} = \int_R f(\lambda) g(\lambda) dF_1(\lambda).$$

Ce qui nous donne $g = \frac{d\mu}{dF_1} \in L'_2$. Appliquant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\frac{|A(f)|}{\|f\|_{L'_2}} \leq \|g\|_{L'_2}, \quad \forall f \in L'_2.$$

D'où
$$\|g\|_{L'_2}^2 = \|A\| \leq 1, \text{ c'est à dire } \int_R \left| \frac{d\mu}{dF_1} \right|^2 dF_1 \leq 1.$$

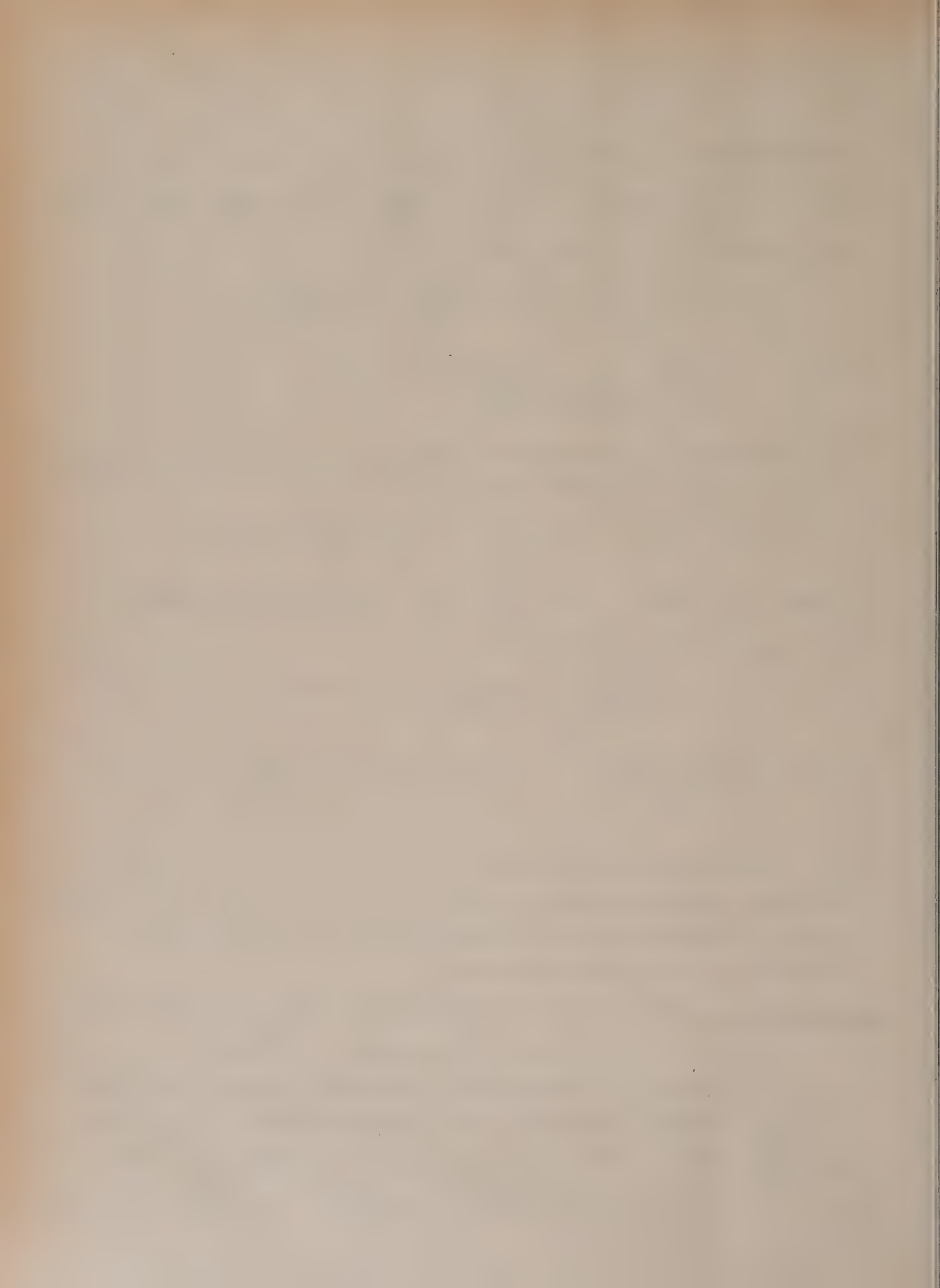
Si au lieu de considérer le cas où $\Gamma(t, t')$ est une covariance, nous envisageons celui où $\Gamma(t, t')$ est la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée, alors nous obtenons la

PROPOSITION I-9. Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\Gamma(t, t') = r[t' - t + k(t, t' - t)T] - \overline{m(t)}m(t')$$

soit la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q. $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$, est que

(I-5)
$$m(t) = a \cdot \exp \left\{ i 2\pi \lambda_0 \left[t - e\left(\frac{t}{T}\right)T \right] \right\}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R},$$



où la fonction spectrale F_1 de $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$ a un saut au point λ_0 , saut $\geq |a|^2$.

Démonstration.

(i) Condition suffisante : nous avons, d'après sa définition

$$r \left[t'-t + k(t, t'-t)T \right] = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\lambda \left[t'-e(\frac{t'}{T})T - t + e(\frac{t}{T})T \right]} dF_1(\lambda).$$

D'où $\Gamma(t, t') =$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \int_{\lambda_0 + \varepsilon'}^{+\infty} e^{i2\pi\lambda \left[t'-e(\frac{t'}{T})T + t - e(\frac{t}{T})T \right]} dF_1(\lambda) \\ + e^{i2\pi\lambda_0 \left[t'-e(\frac{t'}{T})T - t + e(\frac{t}{T})T \right]} \left[F_1(\lambda_0+) - F_1(\lambda_0-) - |a|^2 \right]$$

où $F(\lambda_0+) - F(\lambda_0-) - |a|^2 \geq 0$.

Si nous considérons

$$H(\lambda) = \begin{cases} F_1(\lambda) & \text{pour } \lambda < \lambda_0, \\ F_1(\lambda) - |a|^2 & \text{pour } \lambda \geq \lambda_0, \end{cases}$$

Alors
$$\Gamma(t, t') = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\lambda \left[t'-e(\frac{t'}{T})T - t + e(\frac{t}{T})T \right]} dH(\lambda).$$

Ce qui montre que $\Gamma(t, t') = r \left[t'-t + k(t, t'-t)T \right]$ est la covariance d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q. dont la fonction spectrale est $H(\lambda)$.

(ii) Condition nécessaire: On a

$$\Gamma(t, t') = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\lambda \left[t'-e(\frac{t'}{T})T - t + e(\frac{t}{T})T \right]} dH(\lambda)$$

où $H(\lambda)$ est la fonction spectrale d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q. Alors

$$\overline{m(t)} m(t') = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\lambda \left[t' - e(\frac{t'}{T})T - t + e(\frac{t}{T})T \right]} d[F_1(\lambda) - H(\lambda)] .$$

Nous voyons que $m(t)$ est périodique, de période T . Pour t et $t' \in [0, T)$, $\overline{m(t)}m(t')$ est fonction de $t'-t$ seulement. De plus, sur $[0, T)$, $m(t)$ est continue, $m(t)$ doit donc être de la forme $a \cdot \exp(i2\pi\lambda_0 t)$. Ce qui entraîne que

$$F_1(\lambda) = H(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \neq \lambda_0, \text{ et}$$

$$F_1(\lambda_0+) - F_1(\lambda_0-) = H(\lambda_0+) + H(\lambda_0-) = |a|^2 .$$

Comme $H(\lambda_0+) - H(\lambda_0-) \geq 0$, d'où $F_1(\lambda_0+) - F_1(\lambda_0) \geq |a|^2$.

La fonction $m(t)$, de période T , s'écrit $m(t) = a e^{i2\pi\lambda_0 \left[t - e(\frac{t}{T})T \right]}$.

PROPOSITION I-10. Soit $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée à une fonction aléatoire de covariance stationnaire et continue en m.q., dont la fonction spectrale est $F_1(\lambda)$. Soit $r[t'-t + k(t, t'-t)T] = E\overline{Y_t}Y_{t'}$.

(i) Une condition suffisante pour qu'une fonction $m(t)$ de $t \in \mathbb{R}_+$ soit l'espérance mathématique d'une fonction aléatoire de covariance $r[. + k(.)T]$ est que $m(t)$ satisfasse à (I-2) et (I-3).

(ii) Une condition nécessaire pour que $m(t) = EY_t$ est que $m(t)$ satisfasse à (I-2) et (I-3).

Démonstration.

(i) Condition suffisante : d'après la proposition I-8 (i), nous voyons que $\Gamma(t, t')$ définie par (I-1) est une covariance. $\exists$

donc $\{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ telle que $E\overline{Z_t}Z_{t'} = \Gamma(t, t')$. Soit

$y_t = Z_t + m(t)$; $\{y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ a pour covariance $r[t'-t + k(t, t'-t)T]$ et a pour moyenne $Ey_t = m(t)$.

(ii) Condition nécessaire: Posons $Z_t = Y_t - m(t)$, on a alors



$$EZ_t = 0, \quad E\bar{Z}_t Z_{t'} = \Gamma(t, t') = r[t' - t + k(t, t' - t)T] - \overline{m(t)}m(t').$$

Nous nous trouvons alors dans les conditions de la proposition I-8.

APPLICATION : Sur l'existence d'estimateurs de $m(t)$.

Plaçons nous dans le cas discret. Soit

$$(I-9) \quad Z_n = Y_n + m\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{où } EZ_n = m\mu_n, \text{ avec } \mu_n = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ i2\pi\lambda \left[n - e\left(\frac{n}{T}\right)T \right] \right\} d\mu(\lambda).$$

Si on désire estimer la constante m à partir des observations de Z_n , sous quelles conditions aura-t-on des estimateurs non biaisés et convergents en m.q.? Plus précisément, est-il possible de construire une suite de v.a. $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ de la

forme $\zeta_n = \sum_{j=0}^n c_j^n Z_j$, où les coefficients c_j^n sont à choisir pour que

$E\zeta_n = m$, et où de plus, la suite ζ_n converge en m.q. vers m ? Nous avons une réponse partielle dans la

PROPOSITION I-11. Une condition nécessaire pour qu'existent des estimateurs linéaires de m non biaisés et convergents en m.q., est que la suite $\{m\mu_n\}$ ne fasse pas partie de la classe des suites pouvant servir comme espérance mathématique d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée, la covariance étant $r[h + k(n, h)T]$, pour un $m \neq 0$.

Démonstration. En effet, supposons qu'au contraire, pour un certain $m_0 \neq 0$, la suite $\{m_0\mu_n\}$ peut être l'espérance mathématique d'une fonction aléatoire $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ de covariance $r[h + k(n, h)T]$. Alors, d'après la proposition I-10,

$$m_0\mu_n = EY_n \implies m_0\mu_n = m_0 \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ i2\pi\lambda \left[n - e\left(\frac{n}{T}\right)T \right] \right\} d\mu(\lambda)$$

$$\text{où } \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{d\mu}{dF_1} \right|^2 dF_1 \leq \frac{1}{m_0^2} < +\infty, \quad \text{avec}$$

$$r[n' - n + k(n, n' - n)T] = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\lambda \left[n' - e(\frac{n'}{T})T - n + e(\frac{n}{T})T \right]} dF_1(\lambda).$$

Soit maintenant $m_n^* = \sum_{j=0}^n c_j^n z_j$ un estimateur linéaire

non biaisé de m . Nous devons alors avoir $\sum_{j=0}^n c_j^n \mu_j = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^n c_j^n \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ i2\pi\lambda \left[j - e(\frac{j}{T})T \right] \right\} d\mu(\lambda) = 1. \text{ De sorte que,}$$

si $P_n(\lambda) = \sum_{j=0}^n c_j^n \exp \left\{ i2\pi\lambda \left[j - e(\frac{j}{T})T \right] \right\}$, alors

$$\int_{-1/2}^{1/2} P_n(\lambda) d\mu(\lambda) = 1. \text{ Mais}$$

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} P_n(\lambda) d\mu(\lambda) \right| \leq \|P_n\|_{L'_2} \cdot \left\| \frac{d\mu}{dF_1} \right\|_{L'_2}.$$

D'où $\|P_n\|_{L'_2}^2 \geq m_0^2$. Or

$$\|P_n\|_{L'_2}^2 = \left\| \sum_{j=0}^n c_j^n y_j \right\|_{L_2}^2 = \|m_n^* - m\|_{L_2}^2.$$

Ainsi $\|m_n^* - m\|_{L_2}^2 \geq m_0^2 > 0$. Il ne peut donc y avoir d'es-

timateur linéaire, non biaisé et convergent en m.q. de m .

Nous n'avons pas pu établir la condition suffisante, bien qu'elle existe pour le cas stationnaire.

§3. UN AUTRE EXEMPLE.

Nous nous proposons maintenant de citer un autre exemple que celui des fonctions aléatoires de covariance stationnaire associées.

Soit $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}\}$ une fonction aléatoire réelle, de covariance stationnaire et continue en m.q. Nous définissons une fonction aléatoire $\{Y'_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ de la façon suivante:



$$\begin{cases} Y'_t = \tilde{X}_t & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}) \cup [\frac{3}{2}T, 2T) \text{ et} \\ Y'_t = Y'_{t+T}, \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

PROPOSITION I-12. La fonction aléatoire $\{Y'_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ainsi définie est de covariance stationnaire modulo T , avec

$$(I-10) \quad k(t, \tau) = \sum_{i, j \in \mathbb{N} - \{0\}} I_{\alpha_i}(t) \cdot I_{\alpha_j}(t+\tau) \left(\frac{j-i}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^i - (-1)^j] \right)$$

$$\text{où } \alpha_i = \left[(i-1)\frac{T}{2}, i\frac{T}{2} \right), \quad \forall i \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, d'après la construction même de la fonction aléatoire $\{Y'_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, seules les valeurs de $r(x)$ pour $x \in [0, \frac{T}{2}) \cup [T, 2T)$ sont connues.

Puisque Y'_t est périodique, de période T , nous pouvons limiter notre étude au cas où $t \in [0, T)$ et $t+\tau \in [0, T)$. Un calcul facile nous fournit le tableau

(I-11)

$t+\tau \backslash t$	α_1	α_2
α_1	$k=0$	$k=-1$
α_2	$k=1$	$k=0$

(I-11) se complète par translation : $\text{Tr}(+1)$ vers la droite, et $\text{Tr}(-1)$ vers le bas. En effet,

— Pour la translation vers la droite, considérons $t \in \alpha_i$. Supposons que, pour un certain τ , $EY'_t Y'_{t+\tau} = r(\tau+hT)$ où $h \in \mathbb{Z}$. Si nous remplaçons t et τ par t' et τ' tels que $t'=t+T \in \alpha_{i+1}$ et $t'+\tau' = t+\tau$, alors $EY_{t', Y'_{t'+\tau'}} = r[\tau' + (h+1)T]$, car $EY_{t', Y'_{t'+\tau'}} = EY_t Y_{t+\tau} = r(\tau+hT) = r[\tau' + (h+1)T]$.

— De même pour la translation vers le bas, supposons que pour $t+\tau \in \alpha_i$, on a $EY'_t Y'_{t+\tau} = r(\tau+hT)$. Alors pour $\tau' = T + \tau$, $EY'_t Y'_{t+\tau'} = r[\tau' + (h-1)T]$.



Etablissons (I-10) par récurrence. Remarquons d'abord que l'application $(i, j) \rightarrow \frac{i-j}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^j - (-1)^i]$ est une application de $Z \times Z$ dans Z . Considérons maintenant (I-11); il peut se mettre sous la forme

t	α_1	α_2
$t+\tau$		
α_1	$\frac{1-1}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^1 - (-1)^1]$	$\frac{2-1}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^1 - (-1)^2]$
α_2	$\frac{1-2}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^2 - (-1)^1]$	$\frac{2-2}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^2 - (-1)^2]$

Supposons donc que, pour $t \in \alpha_i$ et $t+\tau \in \alpha_j$, on a $k(t, \tau) = \frac{i-j}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^j - (-1)^i]$. Il est alors facile de voir que cette formule reste encore vraie pour $t' \in \alpha_{i+2}$ et $t'+\tau' \in \alpha_j$, car $k(t', \tau') = \frac{i-j}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^j - (-1)^i] + 1 = \frac{(i+2)-j}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^j - (-1)^{i+2}]$. La même chose pour $t' \in \alpha_i$ et $t'+\tau' \in \alpha_{j+2}$, on a $k(t', \tau') = \frac{i-(j+2)}{2} + \frac{3}{4} [(-1)^{j+2} - (-1)^i]$.

PROPOSITION I-13. La fonction de corrélation généralisée de

$\{Y_t', t \in R_+\}$ vaut

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = & I \bigcup_{n \in Z} \alpha_{2n+1}(\tau) \cdot \left\{ (1 - 2 \frac{|\tau_0|}{T}) r(|\tau_0|) + \frac{|\tau_0|}{T} [r(|\tau_0|+T) + r(|\tau_0|-2T)] \right\} \\ & + I \bigcup_{\substack{n \in Z - \{0\} \\ \alpha_{2n}}}(\tau) \cdot \left\{ (2 \frac{|\tau_0|}{T} - 1) r(T - |\tau_0|) + (1 - \frac{|\tau_0|}{T}) [r(|\tau_0|+T) + r(2T - |\tau_0|)] \right\} \end{aligned}$$

où $\alpha_{-1} = (-\frac{T}{2}, 0)$; $\alpha_i = [(i-1)\frac{T}{2}, i\frac{T}{2}]$ pour $i \in N - \{0\}$;

$\alpha_j = [j\frac{T}{2}, (j+1)\frac{T}{2}]$ pour $-j-2 \in N$; α_0 n'est pas défini.



Démonstration. Comme pour les fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T associées, il nous suffit de calculer l'intégrale $\int_0^T r[\tau + k(t, \tau)T] dt$.

1^o/ Pour $\tau \in [0, \frac{T}{2})$,

$$\begin{aligned} \int_0^T r[\tau + k(t, \tau)T] dt &= \int_0^{\frac{T}{2} - \tau} r(\tau) dt + \int_{\frac{T}{2} - \tau}^{\frac{T}{2}} r(\tau + T) dt \\ &+ \int_{\frac{T}{2}}^{T - \tau} r(\tau) dt + \int_{T - \tau}^T r(\tau - 2T) dt \\ &= (T - 2\tau) r(\tau) + \tau r(\tau + T) + \tau r(\tau - 2T). \end{aligned}$$

2^o/ Pour $\tau \in [\frac{T}{2}, T)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T r[\tau + k(t, \tau)T] dt &= \int_0^{T - \tau} r(\tau + T) dt + \int_{T - \tau}^{\frac{T}{2}} r(\tau - T) dt \\ &+ \int_{\frac{T}{2}}^{T - \tau} r(\tau - 2T) dt + \int_{\frac{3}{2}T - \tau}^T r(\tau - T) dt \\ &= (T - \tau) r(\tau + T) + (2\tau - T) r(\tau - T) + (T - \tau) r(\tau - 2T). \end{aligned}$$

Comme $\{Y'_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une fonction périodique, on peut se ramener dans l'intervalle $[0, T)$. Ainsi, on se ramène dans l'un des deux cas envisagés: cas 1^o si $\tau \in \alpha_{2n+1}$, cas 2^o si $\tau \in \alpha_{2n}$. On doit cependant remplacer dans les résultats établis, τ par τ_0 .

PROPOSITION I-14. La fonction spectrale généralisée de $\{Y'_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ s'exprime en fonction de $G_1(\lambda)$ à l'aide de la formule

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dG_1(\lambda) \left\{ \frac{1 - \cos \pi(n + \lambda T)}{(n + \lambda T)^2} + \frac{1 - \cos \pi(n - \lambda T)}{(n - \lambda T)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(n^2 + \lambda^2 T^2)}{(n^2 - \lambda^2 T^2)^2} \cos 3\pi \lambda T \sin \frac{\pi}{2}(n + \lambda T) \sin \frac{\pi}{2}(n - \lambda T) \right\}, \text{ pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dG_1(\lambda) \frac{1}{(\lambda T)^2} \left[1 - \cos \pi \lambda T + 2 \cos 3\pi \lambda T \left(\sin \frac{\pi}{2} \lambda T \right)^2 \right] .$$

Les calculs sont longs. Nous ne les reproduisons pas ici.

Signalons enfin que, sous la même condition que pour les fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T associées, nous avons exactement le même résultat concernant l'estimation, c'est à dire la convergence de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$ de G_β^* vers G .

C H A P I T R E I I'

COVARIANCES ET PROCESSUS DE MARKOV.

Nous nous proposons d'appliquer les résultats obtenus dans le chapitre précédent au cas d'une fonction aléatoire liée à une fonction aléatoire Markovienne. Nous examinons cependant le cas stationnaire d'abord, le cas stationnaire modulo T ensuite.

§ 1. CAS STATIONNAIRE .

Dans ce qui suit, $\mathcal{G}$ désigne soit R_+ , soit N . Soit $\{X_t, t \in \mathcal{G}\}$ une fonction aléatoire Markovienne strictement stationnaire, avec la famille de probabilités de transition $\{P_t, t \in \mathcal{G}\}$ et la mesure de probabilité absolue stationnaire Π . L'espace des états est toujours noté $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Soit $\{f \circ X_t, t \in \mathcal{G}\}$ une fonction aléatoire liée à $\{X_t, t \in \mathcal{G}\}$, où f est à valeurs dans R , et telle que $f \in L_2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \Pi)$.

Pour le cas $\mathcal{G} = R_+$, supposons de plus que $\forall x \in \mathcal{X}$, $\{x\} \in \mathcal{B}$, et que $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, \{x\}) = 1$.

$\{f \circ X_t, t \in \mathcal{G}\}$ est une fonction aléatoire de covariance stationnaire, sa fonction de corrélation est

$$r(\tau) = E(f \circ X_t)(f \circ X_{t+\tau}) = \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) \Pi(dx)P_\tau(x, dy).$$

$r(\tau)$ étant continue à l'origine (d'après la condition imposée à P_t), $f \circ X_t$ est donc continue en m.q.

1°/ Plaçons nous dans le cas d'une fonction aléatoire liée à



une fonction aléatoire Markovienne discrète. Nous noterons par $[0, n]$ l'intervalle de temps d'observation, et par $N_n^{<\tau>}(A \times B)$ le nombre de fois que $X_t \in A$ et $X_{t+\tau} \in B$, $t \in [0, n-\tau]$. Supposons, pour simplifier l'étude, que f est bornée. Alors

PROPOSITION II-1. Si la fonction aléatoire Markovienne $\{X_t, t \in N\}$ satisfait à l'hypothèse (H_1^4) 1° et 2° (du chapitre I de la première partie), alors la fonction de corrélation $r(\tau)$ de la fonction aléatoire liée $\{f \circ X_t, t \in N\}$ possède un estimateur convergent $r_n^*(\tau)$. Plus précisément,

$$r_n^*(\tau) = \frac{1}{n} \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) dN_n^{<\tau>}(x, y) \longrightarrow r(\tau),$$

p.s. et en m.q. quand $n \rightarrow +\infty$.

La démonstration est presque immédiate. Il suffit en effet d'introduire (comme au chapitre I de la première partie) la fonction aléatoire $\{X_t^{<\tau>}, t \in N \cap [\tau, +\infty)\}$ telle que $X_t^{<\tau>}(\omega) = (x_1, \dots, x_\tau)$ si $X_{t-\tau+1}(\omega) = x_1, \dots, X_t(\omega) = x_\tau$.

$$\text{Alors } N_n^{<\tau>}(A \times B; \omega) = \sum_{t=\tau}^n I_{A \times \underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_{\tau-2} \times B} \circ X_t^{<\tau>}(\omega)$$

La convergence p.s. s'en déduit immédiatement. Comme $r_n^*(\tau)$ est une variable aléatoire bornée, la convergence p.s. $\Rightarrow$ la convergence en m.q. Cette dernière convergence peut d'ailleurs s'obtenir directement par des calculs analogues à ceux faits pour la proposition II-1-7 de la première partie. Signalons enfin qu'une démonstration peut être prise comme simple application du théorème p.493 de [13], selon lequel

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (g \circ X_t)(g \circ X_{t+\tau}) \longrightarrow r(\tau) \quad \text{p.s. quand } n \rightarrow +\infty, \text{ les condi-}$$

tions étant remplies ici.

Dans le cas particulier où l'espace des états $\mathcal{X}$ est fini,

$$r_n^*(\tau) = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \lambda_i \lambda_j \pi_i^* p_{ij}^{*\langle \tau \rangle}$$

est un estimateur de $r(\tau)$ convergent p.s. et en m.q. , π_i^* désignant la i -ème composante du vecteur Π^* et p_{ij}^* l'élément ij de la matrice P^* , Π^* et P^* étant respectivement les estimateurs de Π et P donnés dans le chapitre I de la première partie ; et $p_{ij}^{*\langle \tau \rangle}$, l'élément ij de $(P^*)^\tau$.

2°/ Soit maintenant le cas permanent, avec l'espace des états fini. Soit $[0, \beta]$ l'intervalle d'observation. Supposons que l'hypothèse (H_4^1) est vérifiée. Notons alors par Π^* et Q^* les estimateurs de Π et Q donnés au chapitre II de la première partie (les éléments sont, rappelons le,

$$\pi_i^* = \frac{1}{\beta} \tau_\beta(i) \quad \text{et} \quad q_{ij}^* = \frac{N_{\beta}(ij)}{\tau_\beta(i)} \quad , \quad q_i^* = \frac{N_{\beta}(i\mathcal{X})}{\tau_\beta(i)} \quad).$$

PROPOSITION II-2. La fonction de corrélation $r(\tau)$ de la fonction aléatoire liée $\{f \circ X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ possède un estimateur convergent p.s. et en m.q., $\forall \tau \in \mathbb{R}$, donné par

$$r_\beta^*(\tau) = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \lambda_i \lambda_j \pi_i^* p_{\tau}^{*(i,j)}$$

où $p_{\tau}^{*(i,j)}$ est l'élément ij de la matrice $e^{Q^* \tau}$, et où les λ_i désignent les valeurs de f .

En effet, quand $\beta \rightarrow +\infty$, $e^{Q^* \tau} \rightarrow e^{Q \tau}$. Comme $r_\beta^*(\tau)$ est une somme finie de termes, le résultat énoncé s'en déduit immédiatement.

§2. CAS STATIONNAIRE MODULO T.

Plaçons nous directement dans le cas d'une fonction aléatoire de covariance stationnaire modulo T associée, où, rappelons le

$$k(t, \tau) = -e\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot I_{B_1}(t, \tau) - \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) + 1\right] \cdot I_{B_2}(t, \tau) - \left[e\left(\frac{\tau}{T}\right) - 1\right] \cdot I_{B_3}(t, \tau)$$



Soit $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ une fonction aléatoire Markovienne strictement stationnaire, ayant Π pour probabilité absolue stationnaire, et $\{P_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ pour famille de probabilités de passage. Soit $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire construite à partir de la précédente:

$$Y_t = X_t \text{ pour } t \in [0, T) \text{ , et } Y_{t+T} = Y_t, \forall t \in \mathbb{R}_+ .$$

Soit $\{f \circ Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ la fonction aléatoire liée à $\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$. $\{f \circ Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est de covariance stationnaire modulo T associée à $\{f \circ X_t, t \in \mathbb{R}\}$.

On doit avoir alors

$$\begin{aligned} E(f \circ Y_t)(f \circ Y_{t+\tau}) &= I_{B_1}(t, \tau) \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) \Pi(dx) P_{\tau_0}(x, dy) \\ &+ I_{B_2 \cup B_3}(t, \tau) \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) \Pi(dx) P_{T-|\tau_0|}(x, dy) . \end{aligned}$$

La covariance stationnaire modulo T peut s'écrire

$$(II-1) \quad r[\tau + k(t, \tau)T] = \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) \Pi(dx) S_{t, t+\tau}(x, dy)$$

où

$$(II-2) \quad S_{t, t+\tau}(x, A) = I_{B_1}(t, \tau) \cdot P_{\tau_0}(x, A) + I_{B_2 \cup B_3}(t, \tau) P_{T-|\tau_0|}(x, A) .$$

Les propriétés de $S_{t, t+\tau}$ sont évidentes:

$\forall A \in \mathcal{B}$, $S_{t, t+\tau}(\cdot, A)$ est une fonction $\mathcal{B}$ -mesurable; $\forall x \in \mathcal{X}$ $S_{t, t+\tau}(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$; d'après sa construction $S_{t, t+\tau}$ ne vérifie pas l'équation de Chapman Kolmogorov (par surcroît de précaution, on peut se convaincre en vérifiant sur le cas : $t, \tau, \tau' > 0$; $0 < \tau, \tau' < \frac{T}{2}$; $0 < t+\tau < T$; $T < t+\tau+\tau' < 2T$). Enfin,

$$S_{t, t+\tau} = S_{t, t+(\tau+T)} = S_{(t+T), (t+T)+\tau} .$$



Nous avons vu dans l'étude générale, comment on est conduit à prendre la moyenne temporelle de la covariance stationnaire modulo T . Nous faisons la même chose ici avec $S_{t, t+\tau}$.
Considérons donc (y remplacer l' $\int$ par un $\sum$ pour le cas discret)

$$(II-3) \quad M_{\tau}(x, A) = \lim_{U \rightarrow +\infty} \frac{1}{U} \int_0^U S_{t, t+\tau}(x, A) dt$$

(rappelons que nous avons supposé la continuité de P_t en $t = 0$, cf. paragraphe 1). Nous avons

$$M_{\tau} = M_{\tau+T} \quad \text{et} \quad M_{\tau} = M_{-\tau}.$$

L'expression explicite de M est d'ailleurs

$$\begin{aligned} M_{\tau}(x, A) &= \frac{1}{T} \int_0^T S_{t, t+\tau}(x, A) dt \\ &= \left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) \cdot P_{|\tau_0|}(x, A) + \frac{|\tau_0|}{T} \cdot P_{T-|\tau_0|}(x, A). \end{aligned}$$

ESTIMATION DE LA FONCTION DE CORRELATION GENERALISEE.

Nous distinguons de nouveau les deux cas:

1°/ Cas discret.

Une estimation de la fonction de corrélation généralisée consiste à estimer d'abord $\int_A \Pi(dx) M_{\tau}(x, B)$. A ce propos, nous avons la

PROPOSITION II-3. Si la fonction aléatoire Markovienne $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ vérifie l'hypothèse (H_1^4) 1° et 2° du chapitre I de la première partie, alors

$\exists$ un estimateur de $\int_A \Pi(dx) M_{\tau}(x, B)$ qui est sans biais et qui converge p.s. et en m.q. quand $n \rightarrow +\infty$. Cet estimateur vaut

$$\left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) \cdot \frac{1}{n} N_n^{<|\tau_0|>}(A \times B) + \frac{|\tau_0|}{T} \cdot \frac{1}{n} N_n^{<T-|\tau_0|>}(A \times B).$$

Et comme corollaire , la

PROPOSITION II-4. Sous l'hypothèse (H_1^4) 1° et 2° ,et si f est bornée, alors la fonction de corrélation généralisée $\Phi(\tau)$ possède un estimateur

$$\Phi_n^*(\tau) = \int_{\mathcal{X}^2} f(x)f(y) \cdot \frac{1}{n} \left[\left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) dN_n^{<|\tau_0|>}(x,y) + \frac{|\tau_0|}{T} dN_n^{<T-|\tau_0|>}(x,y) \right]$$

qui est sans biais, et qui est convergent au sens p.s. et en m.q.

2°/ Cas permanent.

Plaçons nous directement dans le cas où $\mathcal{X}$ ne possède qu'un nombre fini d'états. D'après la proposition II-2, nous pouvons énoncer ici le résultat suivant (en désignant par M_τ la matrice d'éléments $M_\tau(i,j)$)

PROPOSITION II-5. Sous l'hypothèse (H_4^1) , $\exists$ un estimateur convergent au sens p.s. de M_τ donné par

$$M_\tau^* = \left(1 - \frac{|\tau_0|}{T}\right) e^{Q^*|\tau_0|} + \frac{|\tau_0|}{T} e^{Q^*(T-|\tau_0|)}$$

Comme corollaire, nous avons

PROPOSITION II-6. Sous l'hypothèse (H_4^1) , $\exists$ un estimateur convergent au sens p.s. de la fonction de corrélation généralisée , donné par

$$\Phi_\beta^*(\tau) = \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \lambda_i \lambda_j M_\tau^*(i,j) .$$

ESTIMATION DE LA FONCTION SPECTRALE GENERALISEE .

Supposons que $\forall x \in \mathcal{X}$, $P_t(x, \cdot) \ll \mu$, où μ est une mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Notons par p_t la dérivée de Radon-Nikodym de P_t par rapport à μ . Dans ce cas , $\forall x \in \mathcal{X}$, $S_{t,t+\tau}(x, \cdot) \ll \mu$ et $M_\tau(x, \cdot) \ll \mu$, et si nous notons par m_τ la dérivée de Radon-Nikodym de M_τ par rapport à μ , alors



$$m_{\tau}(x,y) = (1 - \frac{|\tau_0|}{T}) \cdot p_{|\tau_0|}(x,y) + \frac{|\tau_0|}{T} \cdot p_{T-|\tau_0|}(x,y) .$$

Pour (x,y) fixé, notons par

$$b_n(x,y) = \frac{2}{T} \int_0^T m_{\tau}(x,y) \cdot \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau \, d\tau .$$

Soit $G(\lambda)$ la fonction de corrélation généralisée (cf. proposition I-5). Nous avons, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) d\mu(y) g(x)g(y) b_n(x,y)$$

et pour $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) d\mu(y) g(x)g(y) b_0(x,y) .$$

Notons par $[0, \beta]$ l'intervalle de temps d'observation servant à la construction d'estimateurs de $p_{\tau}(x,y)$. Soit $p_{\tau, \beta}^*(x,y)$ un estimateur convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$ de $p_{\tau}(x,y)$. Et

notons par $C_{\tau}(x,y) = \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{\alpha} \| p_{\tau, \beta}^*(x,y) - p_{\tau}(x,y) \|$.

PROPOSITION II-7. Si $\forall \tau \in [0, T]$, $\exists$ un estimateur $p_{\tau, \beta}^*(x,y)$ de $p_{\tau}(x,y)$ convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$, avec $C_{\tau}(x,y)$ tel que

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) \mu(dy) |g(x)g(y)| C_{\tau}(x,y) < +\infty ,$$

alors la fonction spectrale généralisée G possède un estimateur convergent de l'ordre de $\beta^{2\alpha}$ (l'estimateur construit à partir de $p_{\tau, \beta}^*$).

En particulier, si $\mathcal{X}$ est fini, si le processus est discret et l'hypothèse (H_2) du chapitre I de la première partie est vérifiée, les conditions de la proposition sont satisfaites, avec $\alpha = \frac{1}{2}$.



Démonstration. Désignons par $b_{n,\beta}^*(x,y)$ et par $a_{n,\beta}^*$ les estimateurs de $b_n(x,y)$ et de a_n construits à partir de $p_{\tau,\beta}^*(x,y)$. On a

$$\|a_{n,\beta}^* - a_n\|^2 = \left\| \int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) \mu(dy) g(x) g(y) [b_{n,\beta}^*(x,y) - b_n(x,y)] \right\|^2 \\ \leq \left(\int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) \mu(dy) |g(x)g(y)| \cdot \|b_{n,\beta}^*(x,y) - b_n(x,y)\| \right)^2.$$

$$\text{Or } \|b_{n,\beta}^*(x,y) - b_n(x,y)\| \leq \frac{2}{T} \int_0^T \|p_{\tau,\beta}^*(x,y) - p_{\tau}(x,y)\| d\tau \\ + \frac{2}{T} \int_0^T \|p_{T-\tau,\beta}^*(x,y) - p_{T-\tau}(x,y)\| d\tau.$$

D'où

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^\alpha \|a_{n,\beta}^* - a_n\| \leq \frac{4}{T} \int_0^T d\tau \left(\int_{\mathcal{X}^2} \Pi(dx) \mu(dy) |g(x)g(y)| C_\tau(x,y) \right)$$

Cas particulier : Supposons que $\mathcal{X}$ est fini, que le processus de Markov est discret, et que (H_2) est vérifiée. Il nous suffit de montrer, ici, que $\forall \tau = 1, 2, \dots, T-1$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{1/2} \|p_{\tau,\beta}^*(i,j) - p_\tau(i,j)\| = C_\tau(i,j) < +\infty,$$

(Par commodité d'écriture, nous notons indifféremment $p_\tau(i,j)$ et $p_{ij}^{<\tau>}$). Nous avons alors immédiatement

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{1/2} \|a_{n,\beta}^* - a_n\| \leq \frac{4}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{i,j \in \mathcal{X}} \lambda_i \lambda_j C_\tau(i,j) < +\infty.$$

Nous devons donc calculer

$$\|p_{\tau,\beta}^*(i,j) - p_\tau(i,j)\|^2 = \|N_\beta^{<\tau>}(ij)\|^2 - [\pi_i p_{ij}^{<\tau>}]^2$$

Tout revient à calculer le premier terme du second membre. Il vaut

$$\sum_{t=\tau-1}^{\beta} \|I_{i \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \times j} \circ X_t^{<\tau>}\|^2 + 2 \sum_{t-t' \geq \tau} E(I_{i \dots j} \circ X_t^{<\tau>}) (I_{i \dots j} \circ X_{t'}^{<\tau>})$$



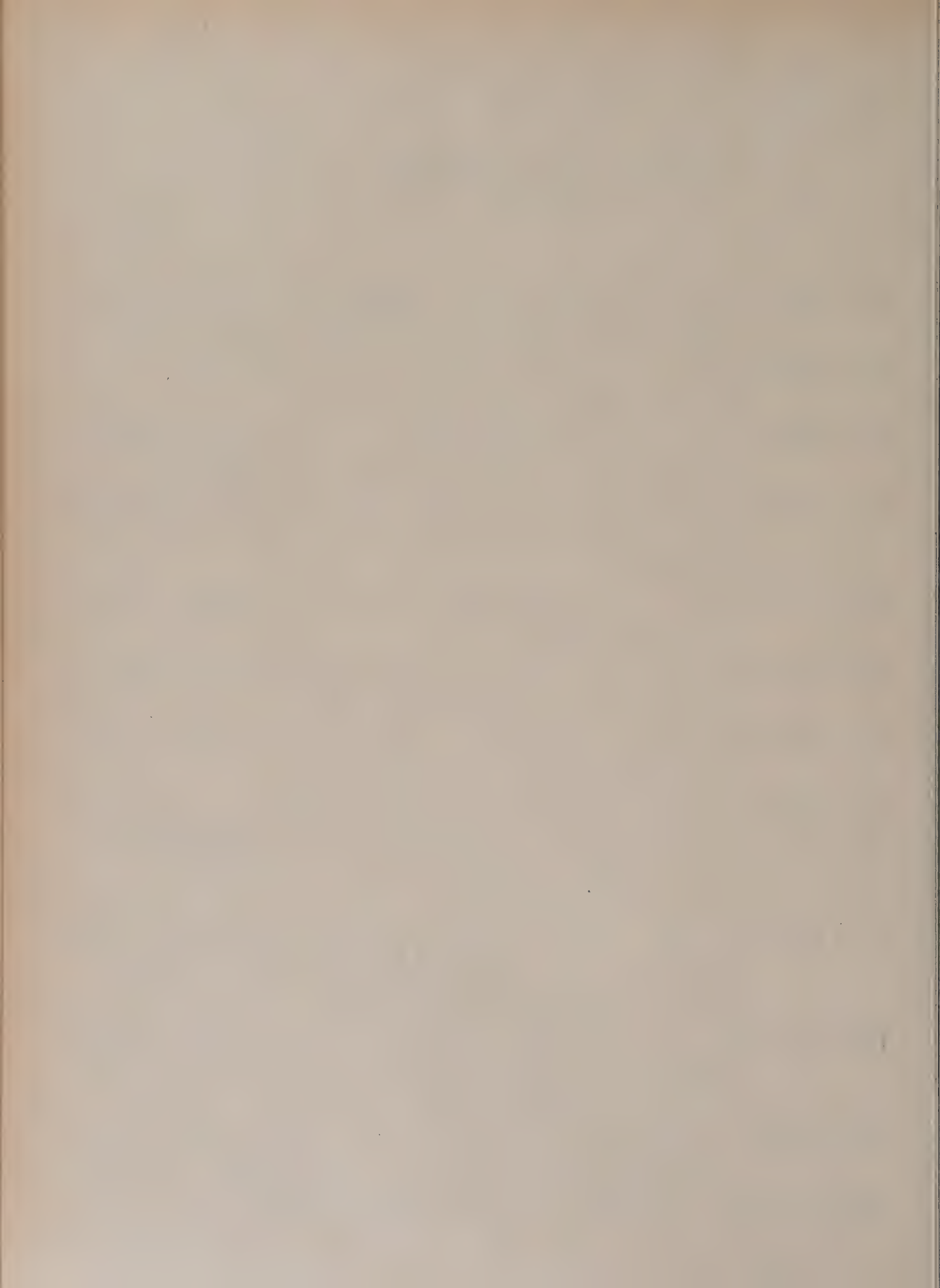
$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{0 < t-t' < \tau} E(I_{i \dots j} \circ X_t^{<\tau>}) (I_{i \dots j} \circ X_{t'}^{<\tau>}) \\
& = (\beta - \tau + 1) \pi_i p_{ij}^{<\tau>} + 2 \pi_i (p_{ij}^{<\tau>})^2 \sum_{m=0}^{\beta-2\tau} (\beta - m - 2\tau + 1) p_{ji}^{<m>} \\
& \quad + 2 \pi_i \sum_{m=1}^{\tau-1} (\beta - m - \tau + 1) p_{ii}^{<m>} p_{ij}^{<\tau-m>} p_{jj}^{<m>}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{1/2} \| p_{\tau, \beta}^{*}(i, j) - p_{\tau}(i, j) \|$ existe et est finie, puisque $\sum_{m=0}^{+\infty} | p_{ji}^{<m>} - \pi_i | < +\infty$.



B I B L I O G R A P H I E

- [1] Anderson T.W. et Goodman Leo A.- Statistical inference about Markov chains. Ann.Math.Stat.28,Nº1,1957,pp.89-109.
- [2] Balakrishnan A.- On a characterization of covariances. Ann.Math.Stat.30,Nº3,1959,pp.670-675.
- [3] Bartlett M.S.- The frequency goodness of fit test for probability chains. Proc.Camb.Phil.Soc.47,1951,pp.86-95.
- [4] Bass J.- Suites uniformément denses.Moyennes trigonométriques. Fonctions pseudo-aléatoires. Bull.Soc.Math.France 87, 1959,pp.1-64.
- [5] Billingsley P.- Statistical methods in Markov chains. Ann.Math. Stat.32,Nº1,1961,pp.12-40.
- [6] Billingsley P.- Statistical inference for Markov processes. The University of Chicago Press,1961.
- [7] Blanc-Lapierre A. et Fortet R.- Théorie des fonctions aléatoires. Masson et Cie,Paris 1953.
- [8] Bui Trong Liêu.- Thèse 3ème Cycle,Paris,1959.
- [9] Bui Trong Liêu.- Estimation dans les processus de Markov discrets. C.R.de l'Acad.des Sciences 251,1960,pp.1339-1340; et erratum p.1848.
- [10] Bui Trong Liêu.- Estimation dans les processus de Markov permanents. C.R.de l'Acad.des Sciences 251,1960,pp.1607-1608, et C.R.252,1961,pp.840-841.
- [11] Bui Trong Liêu.- Un exemple de fonctions aléatoires de covariance stationnaire modulo T. C.R.de l'Acad.des Sciences 253,1961,pp.2192-2194.
- [12] Cramer H.- Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press,1946.
- [13] Doob J.L.- Stochastic processes. John Wiley,1953.



- [14] Feller W.- On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Ann.Math.* 65, 1957, pp. 527-570.
- [15] Fortet R.- Résumés exhaustifs pour un processus de Markov. *C.R. de l'Acad. des Sciences* 247, 1958, pp. 28-29.
- [16] Fortet R.- Tests pour des problèmes d'attente et d'occupation. Colloque sur la Recherche Opérationnelle, Bruxelles, 1959, Office Belge pour l'accroissement de la productivité, édit.
- [17] Fortet R.- Problèmes de statistique concernant des processus de Markov. *Transactions of the Second Prague Conference* 1959, Publications de l'Académie des Sciences de Tchécoslovaquie.
- [18] Fréchet M.- Méthodes des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. Gauthiers-Villars, Paris, 1952.
- [19] Gani J.- Some theorems and sufficiency conditions for maximum likelihood estimator of an unknown parameter in a simple Markov chain. *Biometrika* 42, 1955, pp. 342-359, et 43, 1956, pp. 497-498.
- [20] Gladyshev E.G.- Periodically correlated random sequences. *Doklady Akad.* 137, nos 1-6; Traduction dans *Soviet Mathematics* 2, № 2, 1961, pp. 385-388.
- [21] Halmos P.R.- *Measure Theory*. Van Nostrand, 1950.
- [22] Kendall D.G.- Some analytical properties of continuous Markov transition functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 78, 1955, pp. 529-540.
- [23] Lange O.- Statistical estimation of parameters in Markov processes. *Colloq. Math.* 3, 1955, pp. 147-160.
- [24] Loève M.- *Probability Theory*. (2^e édition). Van Nostrand, 1960.
- [25] Parzen E.- On consistent estimates of spectrum of a stationary time series. *Ann. Math. Stat.* 28, 1957, pp. 329-348.



- [26] Valiron G.- Théorie des fonctions. Masson et Cie, Paris, 1948.
- [27] Wald A.- Asymptotic properties of the maximum likelihood estimate of an unknown parameter of a discrete stochastic processes. Ann. Math. Stat. 19, 1948, pp. 40-46.
- [28] Whittle P.- Some distribution and moment formulae for Markoff chains. J. R. Stat. Soc. (ser. B), 17, 1955, pp. 235-242.
- [29] Ylvisaker N. Donald.- A generalization of a theorem of Bala-krishnan. Ann. Math. Stat. 32, №4, 1961, p. 1337.



DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Le théorème du point fixe , de Brouwer à Kakutani.

Vu et approuvé:

Paris, le ____ 24 Avril ____ 1962 ____

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS CONCERNANT LA FACILITE

Le volume de papier, de soie ou de coton

de papier

de papier

de papier

de papier

de

de papier

de papier

